

Μαθήματα: Θεωρία Αναβάσεων Bayes

Καθηγητής: Απ. Μπατziδης

Γραφείο: 309 γ

Τηλέφωνο: 26510-08232

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ τυχαίο δείγμα (T, δ) [Δεδομένα]

$\mathcal{X}$: Διευθυντικός χώρος

$\mathcal{H}$: Παραμετρικός χώρος

$\mathcal{D}$: Χώρος αναβάσεων (Σύνολο δυνατών αναβάσεων που μπορώ να πάρω π.χ. να πάρω ή όχι ομπρέλα)

⚠ Ο χώρος αναβάσεων ταυτίζεται με τον παραμετρικό χώρο όταν έχω προβλήματα ευτιμής

π.χ. $H_0: \mu = 75$ $\mathcal{D} = \{\text{αποδ. } H_0, \text{απορ. } H_0\}$
 $H_0: \mu \neq 75$

Συνάρτηση (υπό)ανάβασης: Μια λειτουργία συνάρτηση η οποία ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$ και παίρνει τιμές στο χώρο αναβάσεων $\mathcal{D}$. Η τιμή της συνλειτουργίας ανάβασης λέγεται απόφαση.

Συνάρτηση απώλειας: Συμβολισμός: $L(g(\theta), d(x))$

(loss function)

Εκφράζει την απώλεια (ζημία) που θα έχω όταν επιλέξω την άγνωστη $g(\theta)$ με τη συνάρτηση απόφασης $d(x)$.

Απλά, την απώλεια που θα έχω όταν παίρνω την απόφαση $d(x)$ τη στιγμή που η πραγματική τιμή είναι $g(\theta)$. Η συνάρτηση αυτή παίρνει τιμές $\mathcal{H} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ιδιότητες: $L(g(\theta), d(x)) \geq 0 \quad \forall \theta, d$

$L(g(\theta), d(x)) = 0$ αν-ν $d(x)$ η σωστή απόφαση

⚠ Όσο μικρές οι τιμές της $L(g(\theta), d(x))$ τόσο κοντά βρίσκουμε στην πραγματικότητα.

Συνάρτηση ωφέλειας: $U(g(\theta), d(x)) = -L(g(\theta), d(x))$

Γνωστές συνάρτησεις απώλειας

- $L(\theta, d) = |\theta - d|^k$

για $k=1 \rightarrow$ ανώτατο οφάκιμα

$k=2 \rightarrow$ τετραγωνικό οφάκιμα T.S. $L(\theta, d) = |\theta - d|^2$

- Linex (Linear Exponential)

$$L(\theta, d) = e^{k(d-\theta)} - k(\theta - d) - 1$$

* Απο υαθε συνάρτηση απώλειας διαφαιρετικό αποτέλεσμα έχω.

- Stein

$$L(\theta, d) = \frac{d}{\theta} - 1 - \log \frac{d}{\theta}$$

- $L(\theta, d) = \begin{cases} (d-\theta)^2, & d < \theta \\ 10(d-\theta)^2, & d \geq \theta \text{ (υπερκευτμένη)} \end{cases}$

Συνάρτηση διακινδυνεύσεως

(risk function)

$$R(g(\theta), d(x)) = E L(g(\theta), d(x)) = \begin{cases} \int_x L(g(\theta), d(x)) f(x|\theta) dx, & \chi: \text{συνεχής} \\ \sum_x L(g(\theta), d(x)) P(x=x|\theta), & \chi: \text{διακριτή} \end{cases}$$

Πόρισμα: Αν η συνάρτηση απώλειας είναι το T.S. (τετραγωνικό οφάκιμα) τότε $R(g(\theta), d(x)) = \text{Var } d(x) + [E d(x) - g(\theta)]^2$

Απόδειξη:

$$R(g(\theta), d(x)) \stackrel{\text{ορίσ.}}{=} E L(g(\theta), d(x)) \stackrel{\text{L είναι T.S.}}{=} E (g(\theta) - d(x))^2 =$$

Υπενθύμιση: $\text{Var } X = E X^2 - (E X)^2 \Rightarrow E X^2 = \text{Var } X + (E X)^2$

$$E(a + bX) = a + b E X$$

$$= \text{Var}(d(x) - g(\theta)) + [E(g(\theta) - d(x))]^2$$

$$= \text{Var } d(x) + [E g(\theta) - E d(x)]^2 = \text{Var } d(x) + (g(\theta) - E d(x))^2$$

Ορισμός: Ένας ευρισμένης $d(x)$ του θ λέγεται οβερβόλητος αν ισχύει $E d(x) = \theta$

$$R(g(\theta), d(x)) \stackrel{L \rightarrow T.S}{=} \text{Var} d(x) + \underbrace{[E d(x) - g(\theta)]^2}_{\substack{\text{Bias squared} \\ \text{to } g(\theta)}}$$

Παραδείγματα:

• Ασκήση 1: $X_1, \dots, X_n$ τ.δ $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 : άγνωστο

Να βρεθεί ο καλύτερος ευρεστήρας του σ^2 στην κλάση των ευρεστήρων $d(x) = bS^2$, $b > 0$ όταν έχουμε ως συνάρτηση απώλειας

i) το ΤΣ δηλ $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$

ii) Stein $L(\theta, d) = \frac{d}{\theta} - 1 - \log \frac{d}{\theta}$

i) $R(\theta, d) = R(\sigma^2, bS^2) = E L(\sigma^2, bS^2) \stackrel{\text{L.T.O.T.S}}{=} \text{Var}(bS^2) + [E(bS^2) - \sigma^2]^2$
 $= b^2 \text{Var} S^2 + [bES^2 - \sigma^2]^2$

Γνωρίζω ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

• $E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \frac{(n-1)}{\sigma^2} ES^2 = E\left[\chi_{n-1}^2\right] = (n-1)$

$\frac{(n-1)ES^2}{\sigma^2} = (n-1) \Rightarrow ES^2 = \sigma^2$

• $\text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \text{Var}(\chi_{n-1}^2) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \text{Var} S^2 = 2(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Var} S^2 = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$

Συνοψίζω:

$R(\theta, d) = b^2 \frac{2\sigma^4}{(n-1)} + [b\sigma^2 - \sigma^2]^2 = b^2 \frac{2\sigma^4}{(n-1)} + \sigma^4 (b-1)^2$

$= \sigma^4 \left[b^2 \frac{2}{n-1} + (b-1)^2 \right]$

Θεωρώ $f(b) = b^2 \frac{2}{n-1} + b^2 - 2b + 1$

$f'(b) = \frac{4b}{n-1} + 2b - 2$

$b = \frac{n-1}{n+1}$

Επομένως, η καλύτερη απώθηση είναι η

$d^*(x) = \frac{n-1}{n+1} S^2 = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$



ii)

$$\begin{aligned}
 R(\theta, d) &= E[L(\theta, d)] = E\left[\frac{d}{\theta} - 1 - \log \frac{d}{\theta}\right] \stackrel{d=bS^2}{\theta=\sigma^2} E\left[\frac{bS^2}{\sigma^2} - 1 - \log \frac{bS^2}{\sigma^2}\right] \\
 &= \frac{bES^2}{\sigma^2} - 1 - E\left[\log \frac{bS^2}{\sigma^2}\right] \stackrel{ES^2=\sigma^2}{=} \frac{b\sigma^2}{\sigma^2} - 1 - E\left[\log \frac{bS^2}{\sigma^2}\right] \\
 &= b - 1 - E\left[\log \frac{bS^2}{\sigma^2}\right] = b - 1 - E\left[\log(b) + \log \frac{S^2}{\sigma^2}\right] \\
 &= b - 1 - \log b - E \log \frac{S^2}{\sigma^2}
 \end{aligned}$$

Θέλω να ελαχιστοποιήσω την $F(b) = b - 1 - \log b$

$$F'(b) = 1 - \frac{1}{b}$$

$$F''(b) = \frac{1}{b^2}$$

$$F'(b) = 0 \Rightarrow b = 1$$

Άρα $d^* = S^2$

Άσκηση 2.23

Έστω x τ.μ. από $B(1, \theta)$ με $P(X=x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$, $\theta = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$
 $D = \{a_1, a_2\}$ χώρος αποφάσεων $X = \{0,1\}$

Συνάρτηση απώλειας $L: \theta \backslash d$	a_1	a_2
$\theta_1 = \frac{1}{4}$	1	4
$\theta_2 = \frac{1}{2}$	3	2

Να βρεθεί ο min-max ευρετηρίου

Λύση: Θέλω να βρω $\max_{\theta} \min_d R(\theta, d) \leq \min_{\theta} \max_d R(\theta, d) \forall d$

$x \backslash d$	d_1	d_2	d_3	d_4
$x=0$	a_1	a_1	a_2	a_2
$x=1$	a_1	a_2	a_1	a_2

$$R(\theta, d_1) = L(\theta, d_1(x=0))P(x=0|\theta=\theta_1) + L(\theta, d_1(x=1))P(x=1|\theta=\theta_1) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{4}) + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$R(\theta, d_2) = 1 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$R(\theta, d_3) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$R(\theta, d_4) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{16}{4}$$

$$R(\theta_2, d_1) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$$

$$R(\theta_2, d_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$R(\theta_2, d_3) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$R(\theta_2, d_4) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

Γενικά: $R(\theta, d) = EL(\theta, d) \stackrel{\text{X: διαφ.}}{=} \sum_{\substack{x_1=0 \\ x_2=1}} L(\theta, d(x_i)) P(X=x_i/\theta)$

Έχουμε:

$$R(\theta_1, d_1) = \frac{4}{4}$$

$$R(\theta_2, d_1) = 6/2$$

max

$$R(\theta_2, d_1) = 3$$

$$R(\theta_1, d_2) = 7/4$$

$$R(\theta_2, d_2) = 5/2$$

$$R(\theta_2, d_2) = \frac{10}{4} \rightarrow \text{minmax}$$

$$R(\theta_1, d_3) = 13/4$$

$$R(\theta_2, d_3) = 5/2$$

$$R(\theta_1, d_3) = \frac{13}{4}$$

$$R(\theta_1, d_4) = 16/4$$

$$R(\theta_2, d_4) = 4/2$$

$$R(\theta_1, d_4) = \frac{16}{4}$$

Άρα η minmax απόφαση είναι η $d_2(x)$ η οποία δίνει

$$d_2(x) = \begin{cases} a_1, & x=0 \\ a_2, & x=1 \end{cases}$$

Εργασία: Σε ένα πρόβλημα στατιστικών αποφάσεων έδωσα ο παρατηρητής χώρος $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \{0.3, 0.5, 0.2\}$ και ο χώρος αποφάσεων $D = \{a_1, a_2, a_3\}$

Το $x \sim B(1, \theta)$ έχοντας ως συνάρτηση απώλειας

$\theta \backslash d$	a_1	a_2	a_3	
θ_1	0	4	5	
θ_2	2	3	0	
θ_3	6	0	6	

Να βρεθεί η minmax απόφαση.

$$x \sim B(1, \theta) \quad P(X=x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x=0,1$$

$x \backslash d$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
$x=0$	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
$x=1$	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

Παράδειγμα 1

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2 = \theta)$ μ' γνωστόν

Συνάρτηση απώλειας το T.S: $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$d_2 = k d_1$$

Θέλω να υπολογίσω τα $R(\theta, d_1), R(\theta, d_2)$

Λύση:

$$R(\theta, d_1) = EL(\theta, d_1) = E(\theta - d_1)^2 \stackrel{\text{ανωθ.}}{=} \text{Var} d_1 + (Ed_1 - \theta)^2 *$$

$$\text{Γνωρίζω ότι } x_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{x_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2 \right|$$

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right] = n \quad \text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right] = 2n \Rightarrow \frac{1}{\sigma^4} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right] = 2n$$

$$* = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right] + \left[E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) - \sigma^2\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \text{Var} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \left[\frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \sigma^2\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} 2\sigma^4 \cdot n + \left[\frac{1}{n} n\sigma^2 - \sigma^2\right]^2 = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$$\begin{aligned} R(\theta, d_2) &= EL(\theta, d_2) = E(\theta - d_2)^2 \stackrel{\text{ανωθ.}}{=} \text{Var} d_2 + (Ed_2 - \theta)^2 \stackrel{d_2 = kd_1}{=} \text{Var}(kd_1) + (Ed_1 - \sigma^2)^2 \\ &= k^2 \text{Var} d_1 + (kEd_1 - \sigma^2)^2 = k^2 \frac{2\sigma^4}{n} + (k\sigma^2 - \sigma^2)^2 = \frac{2k^2}{n} \sigma^4 + (k-1)^2 \sigma^4 \\ &= \left[\frac{2k^2}{n} + (k-1)^2\right] \sigma^4 \end{aligned}$$

$$\text{Θαυρώ } f(k) = \frac{2k^2}{n} + (k-1)^2$$

$$f'(k) = \frac{4k}{n} + 2(k-1) \quad f''(k) = \frac{4}{n} + 2 > 0$$

$$f'(k) = 0 \Rightarrow \frac{4k}{n} + 2k = 2 \Rightarrow 4k + 2kn = 2n \Rightarrow 2k(2+n) = 2n$$

$$\text{Αντ } k^* = \frac{n}{2+n}$$

$$R(\theta, k^* d_1) = \left[\frac{2n^2}{n(n+2)^2} + \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^2 \right] \sigma^4 = \left[\frac{2n}{(n+2)^2} + \frac{4}{(n+2)^2} \right] \sigma^4$$

$$= \frac{2\sigma^4}{(n+2)} < \frac{2\sigma^4}{n} = R(\theta, d_1)$$

Αρα η απόφαση $d_2 = \bar{x} d_1$ είναι καλύτερη από d_1

Παράδειγμα 2

Αν d είναι μια απόφαση για θ με σταθερή συνάρτηση (μινδύνα) διασυνδινεύσεως με συνάρτηση απώλειας το Τ.Σ. Ν.Δ.Ο
 η $d^* = \lambda_1 d + \lambda_2$, λ_1, λ_2 σταθερές έχει σταθ. βω. μινδύνα $\theta^* = \lambda_1 \theta + \lambda_2$
 $R(\theta^*, d^*) = \text{σταθ. συνλ.}$ ΣΑ ΤΟ Τ.Σ

Λύση:

$$R(\theta^*, d^*) = E[L(\theta^*, d^*)] \xrightarrow[\text{ΤΟ Τ.Σ.}]{\text{σταθ. βω.}} E[(d^* - \theta^*)^2] = E[(\lambda_1 d + \lambda_2 - (\lambda_1 \theta + \lambda_2))^2]$$

$$= E[\lambda_1 d - \lambda_1 \theta]^2 = E[\lambda_1 (d - \theta)]^2 = E[\lambda_1^2 (d - \theta)^2] = \lambda_1^2 E[(d - \theta)^2]$$

$$= \lambda_1^2 R(\theta, d) = \text{σταθερή συνλ.}$$

Παράδειγμα 3

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. $N(\mu, 1)$

i) $R(\mu, \bar{x})$ (β.α. ΤΟ Τ.Σ.)

ii) Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ τ.δ. $N(\mu, 1)$ ν.δ.ο. $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ δεν είναι παραδεικτός

Λύση:

$$i) R(\mu, \bar{x}) = E[L(\mu, \bar{x})] \xrightarrow[\text{Τ.Σ.}]{\text{ΣΑ } \mu_0} E[(\bar{x} - \mu)^2] = \text{Var } \bar{x} + (E\bar{x} - \mu)^2 =$$

$$= \text{Var } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \left(E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu \right)^2 = \frac{1}{n^2} \text{Var } \sum x_i + \left(\frac{1}{n} E \sum x_i - \mu \right)^2$$

$$\overset{\text{απ. 2.1}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var } x_i + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E x_i - \mu \right)^2 = \frac{1}{n^2} n \cdot 1 + \left(\frac{1}{n} n \mu - \mu \right)^2 = \frac{1}{n}$$

ii) Για να μην είναι παραδεικτός αρκεί να βρω έναν καλύτερο από τον $\bar{x}$ να έχει μικρότερη συνάρτηση διασυνδινεύσεως
 $R(\mu, T^*) < R(\mu, T) = \frac{1}{n}$

Θα μπορούσε να είναι ο $T^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} x_i$ για τον οποίο προκύπτει
 $R(1, T^*) = \frac{1}{2n}$ (το λάνω).

ΕΛΛΑΣΤΙΚΗ

$x_1, \dots, x_n$ - δ από έναν
 αριθμό $1 \leq 6, n \geq 6, n$
 $f(x|\theta)$ όταν θ είναι άγνωστη
 αλλά ελαστική παράμετρος

BAYES

Διαφοροποίηση: Η θεωρία Bayes θεωρεί
 την άγνωστη παράμετρο θ άγνωστη τ.μ
 με ορισμένη κατανομή.
 Σημαντικές έννοιες: Ευ των προτέρων
 και ευ των υστέρων κατανομή.

Ορισμός: Ευ των προτέρων (a priori) κατανομή

Εκφράζει την ευ των προτέρων γνώση μας για το θ και καθορίζεται
 πριν τη συλλογή των δεδομένων. Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα δείγμα για
 τον αριθμό που μας ενδιαφέρει και με βάση αυτό ανασκευάζουμε τη
 γνώση μας για το θ μέσα από την ευ των υστέρων κατανομή

Ημερίδα (Βήματα)

1. Καθορισμός της $f(x|\theta)$
 καθορίζουμε την κατανομή της x όταν μας δίνεται η παράμετρος θ
2. Καθορισμός της ευ των προτέρων κατανομής
 της αρχικής μεταβλητής θ , $\zeta(\theta)$ ή $\pi(\theta)$
3. Υπολογισμός της ευ των υστέρων κατανομής $f(\theta|x)$ ή $\pi(\theta|x)$ ^{* < B.C}
4. Χρησιμοποιώντας την $P(\theta|x) \rightarrow$ βρούμε συμπεράσματα

* Η λύση είναι το θεώρημα του Bayes για τ.μ

BAYES

Θεώρημα: Έστω S δ.χ και $H_1, H_2, \dots, H_k$ σύνολα τ/ω να αποτελούν
 διαμέριση του δ.χ ($S = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$) (και έστω
 A ένα ενδεχόμενο του δ.χ

$$P(A) = P[(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_k)] = \sum_{i=1}^k P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^k P(A|H_i) P(H_i)$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i|A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Θεωρημα Ολίσμης
Πιθανοτήτων

Assignment 4 Set 63 (H.W.)

1^ο βήμα: $f(x|\theta)$

2^ο βήμα: $f(\theta)$

3^ο >>

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$f(\theta|x) = \frac{f(x, \theta)}{f(x)} = \frac{f(x|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(x, \theta) d\theta} = \frac{f(x|\theta) f(\theta)}{\int f(x|\theta) f(\theta) d\theta} \quad \leftarrow \text{αν θέσω}$$

1ος τύπος

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta) f(\theta)}{\int f(x|\theta) f(\theta) d\theta}$$

2ος τύπος

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta}$$

Παρατ.1 Το διάνυσμα έχει μπει μόνο στο $f(x_i|\theta)$

Παρατ.2 Η $f(\theta|x)$ είναι ε.π.π δηλ είναι μη αρνητική και το ολοκλήρωμα είναι μονάδα.

$$! f(\theta|x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

Παλ.1 Έστω x τ.μ η οποία δίδεται θ ακολουθεί $B(n, \theta)$

$$x \sim B(n, \theta), f(x, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, x=0, \dots, n$$

$$\theta \sim B(a, b) \quad f(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad \text{αλλι}$$

Να βρεθεί η $f(\theta|x)$

Λύση

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) f(x|\theta)}{\int f(\theta) f(x|\theta) d\theta} = \frac{\frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{\int_0^1 \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} d\theta}$$

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1}}{\int_0^1 \theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1} d\theta}, \quad 0 < \theta < 1$$

1ος τρόπος

$$\left. \begin{aligned} B(a,b) &= \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \\ B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \end{aligned} \right\} \theta|x \sim \text{Beta}(a+x, b+n-x)$$

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1}}{B(a+x, b+n-x)}, \quad 0 < \theta < 1$$

2ος τρόπος

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{(a+x)-1} (1-\theta)^{(b+n-x)-1}}{B(a+x, b+n-x) \int_0^1 \theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1} d\theta}$$

3ος τρόπος

$$f(\theta|x) \propto f(\theta) f(x|\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(\theta|x) &\propto \theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1}, \quad 0 < \theta < 1 \\ f(\theta|x) &= \frac{\theta^{a+x-1} (1-\theta)^{b+n-x-1}}{B(a+x, b+n-x)}, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

* Όταν η επιτηδεύτρια αγοράζει βιβλία, τότε πρέπει να αγοράσει η $f(\theta)$ τότε πρέπει να αγοράσει επιτηδεύτρια αγορά.

Παράδειγμα 1

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } U(0, \theta) \quad f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

Αν $f(\theta) = 1$ οποιοδήποτε $0 < \theta < 1$ να βρεθεί η $f(\theta|x)$

Λύση.

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int_{x(n)}^1 f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{1 \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta} d\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad 0 < x_i < \theta$$

max i=1:n

$$0 < x_1 < \theta$$

$$0 < x_2 < \theta$$

⋮

$$0 < x_n < \theta$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\max\{x_i\} < \theta < 1$$

$$x(n) < \theta < 1$$

$$x(n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{-n}}{\frac{\theta^{-n+1}}{-n+1} \Big|_{x(n)}^1} = \frac{\theta^{-n}}{\frac{1}{n-1} (x(n)^{-(n-1)} - 1)} \quad x(n) < \theta < 1$$

Άσκηση 2

$$x_1, \dots, x_n \text{ i.i.d. } N(\theta, 1) \quad f(x|\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2}$$

$$\theta \sim N(0, 1)$$

$$f(\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2}$$

Να βρεθεί η $f(\theta|x)$

Λύση:

$$f(\theta|x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}$$

$$f(\theta|x) \propto e^{-\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} = e^{-\frac{1}{2} [\theta^2 + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)]} = e^{-\frac{1}{2} [\theta^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i + n\theta^2]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} [(n+1)\theta^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i]} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\text{Άρα } f(\theta|x) \propto e^{-\frac{1}{2} [(n+1)\theta^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i]} \quad \theta \in \mathbb{R} = e^{-\frac{(n+1)}{2} [\theta^2 - 2\theta \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}]}$$

$$f(\theta|x) \propto e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} [\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}]^2} \quad \theta|x \sim N\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

(Η.Ν. με το σκελετό της)

Άσκηση 3

$$x_1, \dots, x_n \text{ i.i.d. } P(\theta) \quad f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x=0,1,\dots$$

$$f(\theta|x) = ;$$

$$\theta \sim \text{Gamma}(p, \frac{1}{q})$$

$$f(\theta) = \frac{q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\Gamma(p)}, \quad \theta > 0$$

Λύση:

$$\zeta(\theta|x) = \frac{\zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int \zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!}}{\int q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} d\theta}$$

$$\zeta(\theta|x) = \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{n\theta} \theta^{2x_i}}{\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{n\theta} \theta^{2x_i} d\theta} = \frac{\theta^{p+2x_i-1} e^{-\theta(q+n)}}{\int_0^\infty \theta^{p+2x_i-1} e^{-\theta(q+n)} d\theta} \quad \text{Γάρμμο}(p+2x_i, \frac{1}{q+n})$$

+LW. A6L.3

Εργασία

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται τα $f(x|\theta)$, $\zeta(\theta)$ για διάφορες περιπτώσεις να βρείτε τη $\zeta(\theta|x)$

$f(x \theta)$	$\zeta(\theta)$	Αποτελέσματα
$\Gamma(k, \frac{1}{\theta})$	$\Gamma(q, \frac{1}{q})$	$\Gamma(p+nk, \frac{1}{q+2x_i})$
$\text{Geo}(\theta)$	$\text{Βήτα}(p, q)$	$B(p+2x_i, \frac{1}{q+n})$
$NB(r; \theta)$	$\text{Βήτα}(p, q)$ (μια T.L)	$B(p+r, q+x-r)$
$N(\theta, \frac{1}{\tau})$	$N(b, \frac{1}{c})$	$N(\frac{cb+n\tau\bar{x}}{c+n\tau}, \frac{1}{c+n\tau})$

16/10/2012

8 Δεκεμβρίου (Πρόοδος) 9⁰⁰-12⁰⁰ (Σάββατο)

4 Δεκεμβρίου (όχι πρόοδος)

Θεωρία Bayes

1. Καθορισμός $f(x|\theta)$

2. Καθορισμός $f(\theta)$

3. Υπολογισμός της $\zeta(\theta)$

4. ΕΞΑΓΟΓΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

$$\zeta(\theta|x) = \frac{\zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int \zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta}$$

Ασκηση 1

$x_1, \dots, x_n \sim \delta$ Γάρμμο($k, \frac{1}{\theta}$) $f(x|\theta) = \frac{x^{k-1} e^{-x\theta}}{\Gamma(k)} \theta^k, x \geq 0$

$\theta \sim \text{Γάρμμο}(p, \frac{1}{q})$, $\zeta(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta q}}{\Gamma(p)} q^p, \theta \geq 0$

Να βρεθεί η $\zeta(\theta|x)$

$$\zeta(\theta|x) \propto \zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta q}}{\Gamma(p)} q^p \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{k-1} e^{-\theta x_i}}{\Gamma(k)} \theta^k$$

Αρα

$$\zeta(\theta/x) \propto \theta^{p-1} e^{-\theta q} \theta^{nk} e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \quad \text{δηλ.}$$

$$\zeta(\theta/x) \propto \theta^{p+nk-1} e^{-\theta(q+\sum_{i=1}^n x_i)}, \quad \theta \geq 0$$

$$\zeta(\theta/x) = \frac{\theta^{p+nk-1} e^{-\theta(1/\sum x_i + q)}}{\left(\frac{1}{\sum x_i + q}\right)^{p+nk} \Gamma(p+nk)}, \quad \theta \geq 0$$

$$\Gamma(p+nk, \frac{1}{\sum x_i + q})$$

Εφόσον η επι των προέχων και η επι των υστέρων κατανομή είναι Γάμμα, έχουμε ευθυγρά επι των προέχων κατανομή.

Άσκηση 2

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \frac{1}{c})$$

$$f(x|\theta) = \left(2n \frac{1}{c}\right)^{-1/2} e^{-\frac{c}{2}(x-\theta)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$\theta \sim N(b, \frac{1}{c}) \quad \zeta(\theta) = \left(2n \frac{1}{c}\right)^{-1/2} e^{-\frac{c}{2}(\theta-b)^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}, c > 0$$

Λύση:

$$\zeta(\theta/x) \propto \zeta(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \left(2n \frac{1}{c}\right)^{-1/2} e^{-\frac{c}{2}(\theta-b)^2} \prod_{i=1}^n \left(2n \frac{1}{c}\right)^{-1/2} e^{-\frac{c}{2}(x_i-\theta)^2}$$

Αρα:

$$\zeta(\theta/x) \propto e^{-\frac{c}{2}(\theta-b)^2} e^{-\frac{c}{2} \sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2} = e^{-\frac{c}{2}(\theta^2 - 2\theta b + b^2)} e^{-\frac{c}{2}(\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2)}$$

→ Πετάω τους όρους που δεν έχουν θ .

$$\zeta(\theta/x) \propto e^{-\frac{c}{2}\theta^2} e^{-\frac{c}{2}(-2\theta b)} e^{-\frac{c}{2}(-2\theta \sum x_i)} e^{-\frac{c}{2}n\theta^2}$$

Συνεπώς:

$$\zeta(\theta/x) \propto e^{-\frac{1}{2}(c+nc)\theta^2} e^{\frac{1}{2}\theta(2b+2c\sum x_i)}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, $f_Y(y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}$

$$\zeta(\theta/x) \propto e^{-\frac{(c+nc)}{2}[\theta^2 - 2\theta \frac{cb+c\sum x_i}{c+nc}]}$$

$$\zeta(\theta/x) \propto e^{-\frac{c+nc}{2}[\theta - \frac{cb+c\sum x_i}{c+nc}]^2}, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad N\left(\frac{cb+c\sum x_i}{c+nc}, \frac{1}{c+nc}\right)$$

Αρα μια ακόμη ευθυγρά επι των προέχων κατανομή.

Άσκηση 3 (H.W με $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$)

Έστω x μια Τ.β με κατανομή $f(x|\theta) = \exp(-(x-\theta))$, $\alpha \leq x$
 $f(\theta) = 2\exp(-\theta)$, $\theta \geq 0$. Να βρεθεί η $f(\theta|x)$

Λύση ^{δεν έχω τ'όχιω}
_{βιάζομαι}

$$f(\theta|x) \propto f(\theta) f(x|\theta) = 2e^{-2\theta} e^{-x} e^{\theta}, \alpha \leq x$$

$f(\theta|x) \propto 2e^{-\theta}$, $\alpha \leq x$ (Παρατηρώ ότι δεν είναι νόρμα στο $\mathbb{R}$ γνωστές κατανομές)

Πρέπει να βρω c ώστε να έχω β.π.π.

$$c \geq 0 \rightarrow \text{για να είναι } f(\theta|x) \geq 0$$

$$\text{Επιπλέον } \int_0^x c e^{-\theta} d\theta = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\int_0^x e^{-\theta} d\theta} = \frac{1}{-e^{-\theta} \Big|_0^x} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\text{Ανλ. } c = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$\text{Άρα η } f(\theta|x) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-x}}$$

Ορισμός: (ΜΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΕΣ ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ)

(χρησιμοποιούνται όταν δεν έχω πληροφορία για την κατανομή του θ)

Jeffrey

$$f(\theta) \propto \left[-E_x \left(\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$f(\theta) = c$$

Παράδειγμα

$$x|\theta \sim B(n, \theta)$$

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, x=0, \dots, n$$

Λύση:

$$\log f(x|\theta) = \log \binom{n}{x} + x \log \theta + (n-x) \log (1-\theta)$$

$$\frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta} = x \frac{1}{\theta} + (n-x) \frac{1}{1-\theta} (-1) = x \frac{1}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} \right) = -\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{n-x}{(1-\theta)^2}$$

$$g(\theta) \propto \left[-E_x \left(-\left(\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right) \right) \right]^{1/2}$$

Θα βρω

$$E_x \left(\frac{x}{\theta^2} + \frac{(n-x)}{(1-\theta)^2} \right) = \frac{E_x}{\theta^2} + \frac{n-E_x}{(1-\theta)^2} = \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n-n\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta} + \frac{n(1-\theta)}{(1-\theta)^2}$$

now note,

$$= \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1-\theta} = \frac{n-x\theta + n\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

Επομένως:

$$g(\theta/x) \propto n^{1/2} \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{διότι } f(x|\theta) \sim B(n, \theta))$$

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } g(\theta) = \frac{\theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(2) = 1\Gamma(1)$$

Ευρωπαϊκές βελτιωμένες υποβελτιωμένη στατιστική

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. $f(x|\theta)$ ^{TL(Bayes)}
 → ανάλυση από βελτιωμένα δεδομένα (υποβελτιωμένη στατιστική)

Ορισμός: Ευρωπαϊκής βελτιωμένης υποβελτιωμένης $g(\theta)$ είναι οποιαδήποτε βελτιωμένη ευάρτηση $T(x_1, \dots, x_n)$ η οποία χρησιμοποιείται για την ευάρτηση προσέγγιση της $g(\theta)$

(Εξισότητες)

Κριτήρια αξιολόγησης ευρωπαϊκών

1. Ακρίβεια
2. ΑΟΕΑ (Ακρίβεια Ορισμού Ελάχιστης Διανομής)
3. Γνώση
4. Πληρότητα
5. Ε.Μ.Τ (Ευρωπαϊκή Μεινόμενη Ριθμικότητα)
6. Συνέπεια

Ορισμός 1: Ο ευαρμοστής $T(x_1, \dots, x_n)$ της $g(\theta)$ λέγεται ότι είναι αμερόληπτος εάν $ET = g(\theta) \forall \theta \in \Theta$

Ορισμός 2: Ένας ευαρμοστής $T(x_1, \dots, x_n)$ της $g(\theta)$ λέγεται Α.Ο.Ε.Α (Αμερόληπτος Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διακύμανσης) εάν είναι ευείως αμερόληπτος και έχει την μικρότερη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων ευαρμοστών.

Προτάση 1: Όταν είναι επιτυχός ο προδιορισμός Α.Ο.Ε.Α ευαρμοστή με την ανισότητα Cramer-Rao τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εξής τεχνικό. Το ίδιο στην ανισότητα C-R επιτυγχάνεται αν και μόνο αν $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = k(\theta, n)(U - g(\theta))$ τότε ο U είναι αμερόληπτος

ευαρμοστής της $g(\theta)$.

* Είναι επιτυχός ο προδιορισμός αυτός όταν το Π.Ο της $f(x|\theta)$ δεν εξαρτάται από το θ και η $f(x|\theta)$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $f(x|\theta) = c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)}I_A(x)$, Ασυνάρτητο του θ $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ (Ευθεία συσχέτιση παρατηρήσεων)

Παλ $x_1, \dots, x_n$ τ.δ στο μέγεθος με $f(x|\theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$, $x=0,1,\dots$
Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Α της θ .

• Το Π.Ο ανεξάρτητο του θ .

• Μπορεί να γραφτεί στην (ευθεία συσχέτιση παρατηρήσεων)

$$f(x|\theta) = c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)} = e^{-\theta} \frac{1}{x!} e^{\ln \theta^x} = e^{-\theta} \frac{1}{x!} e^{x \ln \theta}, \quad x=0,1,2,\dots$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\ln \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln \theta - \ln \prod_{i=1}^n x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = -n + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} = \frac{n}{\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta \right) \quad \text{Α.Ο.Ε.Α}$$

$$\Delta 0 \quad E \frac{\sum x_i}{n} = \theta \quad \text{Άρα } \frac{\sum x_i}{n} \text{ Α.Ο.Ε.Α της } \theta.$$

Εάν ζητάμε Α.Ο.Ε. άνω $\theta+5$ $n \frac{1}{\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} + 5 - \underbrace{(\theta+5)}_{\text{πρέπει να είναι } \Gamma_2 \text{ του } \theta} \right)$

Ορισμός 3: (Επαρμεία)

Έστω μια τ.μ X με β.ν.π ή δ.ν $f(x|\theta)$ και $T = T(x_1, \dots, x_n)$ μια β.β. Η T είναι επαρκής για την παράμετρο θ εάν η δεσμευμένη κατανομή των $(x_1, \dots, x_n) | T$ είναι ανεξάρτητη του θ για όλες τις τιμές του T για τις οποίες ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή.

Παραγοντικό Θεώρημα Neyman-Fisher

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ από έναν πληθυσμό με β.ν.π ή β.ν $f(x|\theta)$. Η κατανομή συνάρτηση (δ.δ) T είναι επαρκής για την παράμετρο θ αν-ν $\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = g(T(x), \theta) h(x) \quad \forall \theta \in \Theta$

$\pi(x) | x_1, \dots, x_n \sim B(1, \theta)$.

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x=0,1,\dots$$

Επαρμεία (Neyman-Fisher)

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} = g(\sum x_i, \theta) \cdot 1$$

Επαρκής β.β για το θ είναι το $\sum x_i$

Κάθε 1-1 συνάρτηση επαρκούς β.β είναι και αυτή επαρκής

$n(x) | x_1, \dots, x_n \sim U(0, \theta)$ $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \propto x < \theta$

Να βρεθεί επαρκής β.β για το θ .

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha x_i < \theta \\ \alpha x_1 < \theta \\ \vdots \\ \alpha x_n < \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \max \{x_i\} < \theta \Rightarrow x_{(n)} < \theta$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \quad 0 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n} I_{(x_{(n)} < \theta)}(\theta) I_{(\theta < x_{(n)})}(x_i) = g(x_{(n)}, \theta) h(x)$$

Ορίσμος 4: (Πληρότητα)

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με β.π.π ή β.π. $f(x|\theta)$. Μια β.β.Τ είναι πλήρης αν-ν για κάθε συνάρτηση $h(T)$ των Τ ισχύει ότι $Eh(T) = 0 \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \forall t$ εκτός πιθανών από κάποιο σημείο για τα οποία η πιθανότητα είναι μηδέν για κάποιο θ .

Μεθοδολογία 2 (Lehmann-Scheffe)

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με β.π.π ή β.π. $f(x|\theta)$. Έστω Τ πλήρης και εστω β.β. $U = U(T)$ αβρόπτητος εσπετηής της $g(\theta)$. Τότε U Α.Ο.Ε.Α εσπετηής της $g(\theta)$

Π.χ | $f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$, $x=0,1,\dots$
Να βρεθαι Α.Ο.Ε.Α των θ και των $\frac{1}{\theta}$.

Λύση

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \underbrace{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}_{g(\sum x_i, \theta)} \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}}_{h(x)}$$

π.ο ανεξάρτητο των θ
δεν χρειάζεται
δείχνει

$$Eh(T) = 0 \forall \theta \in \Theta \Rightarrow \sum h(t) P(T=t)$$

Για να βρω την $P(T=t)$ πρέπει να βρω την κατανομή των $T = \sum x_i$

Χρησιμοποιώ την μέθοδο των παραγεννητριών.

$$m_T(t) = E(e^{tT}) = E(e^{\sum x_i t}) = E(e^{tx_1} e^{tx_2} \dots e^{tx_n}) \stackrel{\text{ανεξάρτητα}}{=} E(e^{tx_1}) \dots E(e^{tx_n}) \stackrel{x_1, \dots, x_n \text{ i.i.d.}}{=} E^n(e^{tx_1}) = m_{x_1}^n(t) = \underbrace{(e^{\theta(e^t-1)})^n}_{\text{Poiisson}(\theta)} = \underbrace{e^{n\theta(e^t-1)}}_{\text{Poiisson}(n\theta)}$$

Αρα $\sum x_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$

30/10/2012

31/10/2012 : Αναμνήσεις $2^\infty - 5^\infty$

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. $P(\theta)$

Το $\sum x_i = T$ εσπετηής β.β.

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = g(\sum x_i, \theta) h(x)$$

$$Eh(T) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\sum_t h(t) \cdot P(T=t) = 0 \quad (1)$$

Θέλω να βρω την υατανομή των $T = \sum x_i$

$$m_T(t) = E(e^{tT}) = E(e^{t \sum x_i}) = E(e^{tx_1 + \dots + tx_n}) = E(e^{tx_1} \dots e^{tx_n})$$

$$\stackrel{\text{ανεξ.}}{=} E(e^{tx_1}) E(e^{tx_2}) \dots E(e^{tx_n})$$

$$= E^n(e^{tx}) = m_x^n(t) = (e^{\theta(e^t-1)})^n = e^{n\theta(e^t-1)}$$

$$Eh(x) = \begin{cases} \int h(x) p_x(x) dx & x: \text{cont.} \\ \sum_x h(x) P(x=x) & x: \text{discr.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(xy) = E(x) E(y) \\ E\left(\frac{x}{y}\right) = E(x) \cdot E\left(\frac{1}{y}\right) \end{cases}$$

$$(1) \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{(n\theta)^t e^{-n\theta}}{t!} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow$$

$$\frac{h(0)(n\theta)^0}{0!} + \frac{h(1)(n\theta)^1}{1!} + \frac{h(2)(n\theta)^2}{2!} + \dots = 0$$

$$h(0) = h(1) = h(2) = \dots = 0 \quad \text{δηλ.} \quad h(t) = 0 \quad \forall t$$

Το T είναι ανεξάρτητο και ομοιόμορφο 6.6 για το θ .

Θέλουμε να βρούμε Α.Ο.Ε.Α του θ και του $\frac{1}{\theta}$

$$ET = E\sum x_i = \sum E x_i = \sum_{i=1}^n \theta = n\theta \Rightarrow ET = n\theta$$

$$\frac{ET}{n} = \theta \Rightarrow E\left(\frac{T}{n}\right) = \theta \quad \text{δηλ.} \quad U(T) = \frac{T}{n} \text{ ΑΟΕ.Α } \theta$$

Για το $\frac{1}{\theta}$ (Αδυναμία) $E\left(\frac{1}{T}\right)$

$$\frac{E\left(\frac{1}{T}\right)}{E\left(\frac{1}{T}\right)}$$

(1) καθορισμός της $f(x|\theta)$

(2) καθορισμός της $g(\theta)$

(3) υπολογισμός της $g(\theta|x)$

(4) συμπέρασματα

$$g(\theta|x) = \frac{g(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int g(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta}$$

Ορισμός: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με 6.6 η $f(x|\theta)$, όπου θ η τιμή της τ.κ. θ με τις προεφω υατανομή $g(\theta)$. Ο δείκτης υατάων ελλάρηης Bayes της $g(\theta)$ να συμπίπτει με την $g(\theta)$ ορίεται από τη σχέση:

$$T^* = E[g(\theta)|x]$$

Αρα έχω συνεχή περίπτωση

$$T^* = \int g(\theta) f(\theta/x) d\theta$$

Ορισμός: (αυτοής διαλυτός κατά Bayes)

Ορίζεται ως ευρύτερη διαλυτός κατά Bayes $R(\xi, d)$ για τον ναύα ανάρτησης d για τη θ με τη τω προέφω ναύαση ξ τη μέση τιμή τω $R(\theta, d)$

$$R(\xi, d) = E_{\theta} R(\theta, d)$$

Για τη συνεχή περίπτωση $R(\xi, d) = \int R(\theta, d) \cdot f(\theta) d\theta$

Παραίτω ότι $R(\theta, d) = E_{x|\theta} L(\theta, d)$ αυ. $\int L(\theta, d) f(x|\theta) dx$

Ορισμός: Ένας ευρύτερης d^* ορίζεται να είναι ένας ευρύτερης Bayes εάν $R(\xi, d^*) \leq R(\xi, d) \forall d \in D$
 $\rightarrow$ απόρροα
 $\rightarrow$ απόρροα

$$R(\xi, d^*) = \min_d R(\xi, d)$$

Θεώρημα: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με $6 \cdot n$ ή $6 \cdot n$
 $f(x|\theta)$ όταν θ η τιμή της τ.μ. θ με τη τω προέφω $f(\theta)$

Αν $L(g(\theta), d)$ είναι η αυτοής ανάρτησης τότε ο ευρύτερης Bayes
 της $g(\theta)$ είναι το στατιστικό d^* που ελαχιστοποιεί την μέση
 τιμή $E_{\theta/x} L(g(\theta), d)$

Απόδειξη:

$$\min_d R(\xi, d)$$

$$R(\xi, d) = E_{\theta} R(\theta, d) = \int R(\theta, d) f(\theta) d\theta \stackrel{①}{=} \int \int L(\theta, d) f(\theta) d\theta dx \stackrel{\text{h m o m u o n a p h}}{\stackrel{\text{αυ.}}{\stackrel{x, \theta}{=}}} \int \int L(\theta, d) h(x, \theta) d\theta dx =$$

$$R(\theta, d) = E_{x|\theta} L(\theta, d) = \int L(\theta, d) f(x|\theta) dx \quad ①$$

$$= \int \int L(\theta, d) f(\theta/x) h_1(x) d\theta dx$$

$$\theta \text{ έστω } \min \int L(\theta, d) f(\theta/x) dx \rightarrow E_{\theta/x} L(g(\theta), d)$$

βλ.

ΠΟΡΕΜΑ 1: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ από ένα συνδυασμό με G.N. ή G.N. $p(x|\theta)$ και $g(\theta)$ η ευ των ποσών κατανομή. Ισχύει το ακόλουθο

① Αν $L(g(\theta), d) = (g(\theta) - d)^2$ τότε $d^* = E_{\theta|x} g(\theta)$
↳ ευρωπαϊκή απώλεια Τετραγωνικό άρτιο ↳ ευρωπαϊκός Bayes

② Αν $L(\theta, d) = |\theta - d|$ τότε $d^* = \text{median } g(\theta|x)$
απόλυτο άρτιο

$$\int_{-\infty}^{d^*} g(\theta|x) d\theta = \int_{d^*}^{+\infty} g(\theta|x) d\theta = \frac{1}{2}$$

Απόδειξη:

① $d^* = \min_d E_{\theta|x} L(g(\theta), d) = \min_d \int L(g(\theta), d) \cdot g(\theta|x) d\theta$

$\stackrel{L.T.O.2}{=} \min_d \int (d - g(\theta))^2 g(\theta|x) d\theta$

Παραγωγίζω ως προς d και θέτω ίσο με μηδέν.

$\int 2(d - g(\theta)) g(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow 2d \int g(\theta|x) d\theta = 2 \int g(\theta) g(\theta|x) d\theta \Rightarrow$

$d^* = E_{\theta|x} g(\theta)$

2η παραγωγός ως προς d : $2 \int g(\theta|x) d\theta = 2$

② $d^* = \min_d E_{\theta|x} L(\theta, d) = \min_d \int L(\theta, d) \cdot g(\theta|x) d\theta \stackrel{L.T.O.A.2}{=} \min_d \int |d - \theta| g(\theta|x) d\theta$

$|d - \theta| = \begin{cases} d - \theta, & d > \theta \\ -d + \theta, & d < \theta \end{cases}$

$\min_d \left[\int_{-\infty}^d |d - \theta| g(\theta|x) d\theta + \int_d^{+\infty} |d - \theta| g(\theta|x) d\theta \right]$

$= \min_d \left[\int_{-\infty}^d (d - \theta) g(\theta|x) d\theta + \int_d^{+\infty} (-d + \theta) g(\theta|x) d\theta \right]$

$\min_d \left[d \int_{-\infty}^d g(\theta|x) d\theta - d \int_d^{+\infty} g(\theta|x) d\theta - \int_{-\infty}^d \theta g(\theta|x) d\theta + \int_d^{+\infty} \theta g(\theta|x) d\theta \right]$

$\min_d \left[d \int_{-\infty}^d g(\theta|x) d\theta - d \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta|x) d\theta + d \int_{-\infty}^d g(\theta|x) d\theta - \int_{-\infty}^d \theta g(\theta|x) d\theta + \int_d^{+\infty} \theta g(\theta|x) d\theta \right]$

Για να βρω το ελάχιστο πρέπει να παραγωγίζω ως προς d

$$2 \int_{-\infty}^d f(\theta/x) d\theta + 2d f(d/x) - 1 - d f(d/x) - d f(d/x) = 0$$

$$2 \int_{-\infty}^d f(\theta/x) d\theta = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^d f(\theta/x) d\theta = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς $d^* = \text{median } f(\theta/x)$

(Τύπος Leibniz) :

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{d}{dy} f(x,y) dx +$$

$$+ f(\varphi_2(y), y) \frac{d\varphi_2(y)}{dy} - f(\varphi_1(y), y) \frac{d\varphi_1(y)}{dy}$$

Άσκηση: $X_1, \dots, X_n \sim \delta$ από $P(\theta)$ και η $f(\theta)$ είναι τ.ω η συνάρτηση $\frac{1}{q}$
 Να βρεθούν οι εχθρικές Bayes i) $\theta, e^{-\theta}$ όταν $L(g(\theta), d) = (d - g(\theta))^2$
 ii) θ όταν $L(g(\theta), d) = e^{k(d - g(\theta))} - k(d - g(\theta)) - 1$

Λύση:

$$f(\theta/x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) \Rightarrow f(\theta/x) \propto \theta^{p-1} e^{-\theta q} \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} e^{-\theta}$$

$$\text{Άρα η } f(\theta/x) \propto \theta^{2x+p-1} e^{-\theta(q+n)}, \alpha < \theta < 1$$

$$\theta/x \sim \text{Gamma} \left(2x+p, \frac{1}{q+n} \right)$$

$$f(\theta/x) = \frac{\theta^{2x+p-1} e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n} \right)^{2x+p} \Gamma(2x+p)}, \alpha < \theta < 1$$

$$i) d_1^* = E_{\theta/x} \theta$$

$$d_2^* = E_{\theta/x} e^{-\theta}$$

$$d^* = E_{\theta/x} g(\theta)$$

$$d_1^* = \int_0^1 \theta \frac{\theta^{2x+p-1} e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n} \right)^{2x+p} \Gamma(2x+p)} d\theta = \frac{2x+p}{q+n}$$

$$d_2^* = \int_0^1 e^{-\theta} \frac{\theta^{2x+p-1} e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n} \right)^{2x+p} \Gamma(2x+p)} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta^{2x+p-1} e^{-\theta(q+n+1)}}{\left(\frac{1}{q+n} \right)^{2x+p} \Gamma(2x+p)} d\theta$$

$$d_2^* = \frac{1}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{\sum x_i + p} \Gamma(\sum x_i + p)} \int_0^1 \theta^{\sum x_i + p - 1} e^{-\theta(q+n+1)} d\theta$$

$$d_2^* = \frac{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{\sum x_i + p} \Gamma(\sum x_i + p)}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{\sum x_i + p} \Gamma(\sum x_i + p)} \int_0^1 \theta^{\sum x_i + p - 1} e^{-\theta(q+n+1)} d\theta = \left(\frac{q+n}{q+n+1}\right)^{\sum x_i + p}$$

$$ii) \min_d E_{\theta/x} L(\theta, d) = \min_d \int L(\theta, d) f(\theta/x) d\theta =$$

$$= \min_d \int [e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1] f(\theta/x) d\theta$$

$$k \int e^{k(d-\theta)} f(\theta/x) d\theta - k \int f(\theta/x) d\theta = 0$$

$$k \int e^{k(d-\theta)} f(\theta/x) d\theta = k \int f(\theta/x) d\theta$$

$$e^{kd} \int e^{-k\theta} f(\theta/x) d\theta = 1 \Rightarrow e^{kd} E_{\theta/x} e^{-k\theta} = 1 \Rightarrow e^{kd} = \frac{1}{E_{\theta/x} e^{-k\theta}}$$

Αρα

$$d^* = \frac{1}{k} \log \left[\frac{1}{E_{\theta/x} e^{-k\theta}} \right]$$

Απαιτείται να βρούμε $E_{\theta/x} e^{-k\theta} \dots (H.W) \text{ (όπως προηγούμενο)}$

Λύση

$$X_1, \dots, X_n \sim \delta U(0, \theta), \quad f(\theta) = 1, \quad \alpha \theta < 1 \quad l(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2}$$

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad \alpha x < \theta$$

Λύση

$$\min_d \int L(\theta, d) f(\theta/x) d\theta$$

$$\min_d \int \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2} f(\theta/x) d\theta$$

Πολλώτερο ως προς d να βρούμε θ και θ^2

$$\int \frac{2(d-\theta)}{\theta^2} f(\theta/x) d\theta = 0$$

$$\int \frac{d}{d\theta} f(\theta/x) d\theta - \int \frac{1}{\theta} f(\theta/x) d\theta = 0$$

$$d \int \frac{1}{\theta^2} f(\theta/x) d\theta = \int \frac{1}{\theta} f(\theta/x) d\theta$$

$$d^* = E_{\theta/x} \left(\frac{1}{\theta} \right) = \frac{\int \frac{1}{\theta} f(\theta/x) d\theta}{E_{\theta/x} \left(\frac{1}{\theta^2} \right) = \int \frac{1}{\theta^2} f(\theta/x) d\theta} = \frac{\int \frac{1}{\theta} \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)}{\int \frac{1}{\theta^2} f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) d\theta} d\theta}{\int \frac{1}{\theta^2} \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)}{\int \frac{1}{\theta^2} f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) d\theta} d\theta}$$

$$d^* = \frac{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta^n} d\theta}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{1}{\theta^n} d\theta} \quad x(n) < \theta < 1$$

Los tipos

$$f(\theta/x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)}{\int f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) d\theta} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\theta^n}}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^n} d\theta}$$

'Αυτήν: $x_1, x_2, \dots, x_n$ T.δ. $B(1, \theta)$, $f(x/\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$
 $f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$, $\alpha, \beta < 1$. Η ευρέστη ανώτατος το T.Σ

Να βρεθεί ο ευρέστης Bayes της θ και της $\theta(1-\theta)$

31/10/2012

(Ανασκήση)

'Αυτήν

→ ανεξάρτητες
 → ισότητες (είναι από την ιδιότητα)

Έστω $x_1, \dots, x_n$ T.δ. $U(0, \theta)$ $f(x/\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$

Να βρεθεί A.O.E.A της θ

Λύση: Αναζητώ T επαφής + μήπως 6.6 } $U(T)$ A.O.E.A της θ .
 $U(T) \cap \omega \in U(T) = \theta$

$$\left. \begin{aligned} \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad \left. \begin{aligned} 0 < x_1 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \max \{x_i\} < \theta \Rightarrow x(n) < \theta \\ & \quad 0 < x(1) < x(n) < \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 < x(1) < x(n) < \theta$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \underbrace{I(x(n), \infty)(\theta)}_{g(x(n), \theta)} I(0, x(1))(x(1))$$

Συνεπώς η Επαγωγή 6.6 είναι το $T = x(n)$

• Θέλω τώρα ν.δ.ο T είναι πλήρους 6.6. Αρκετά, λοιπόν, ν.δ.ο
 $Eh(T) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$

$$Eh(T) = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) \underbrace{f_T(t)}_{\text{β.π.π. του } T} dt$$

Θέλω να βρω την κατανομή του T .

Τρόπος εύρεσης κατανομής μιας νέας Τ.Λ.

α) Μέθοδος της α.β.κ. (Απόλυτη ευάρστηση κατανομής)

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(\max\{x_i\} \leq t) = P(x_1 \leq t, x_2 \leq t, \dots, x_n \leq t) \quad \substack{x_1, \dots, x_n \\ \text{ανεξ. Τ.Λ.}} \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i \leq t) = P^n(X \leq t) = F_X^n(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt} F_X^n(t) = n F_X^{n-1}(t) \frac{dF_X(t)}{dt} \\ &= n F_X^{n-1}(t) f_X(t) \end{aligned}$$

Αντικαθ. $f_T(t) = n F_X^{n-1}(t) f_X(t)$

* Όταν θέλω να βρω κατανομή $\max\{x_i\}$ και $\min\{x_i\}$ χρησιμοποιώ τη μέθοδο της α.β.κ.

Τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών τη χρησιμοποιώ όταν έχω συνήδως μετασχηματισμούς της μορφής $Y = aX + b$, $Y = \Sigma x_i$.

$$f_T(t) = n F_X^{n-1}(t) \frac{1}{\theta}, \quad 0 < t < \theta$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} dx = \frac{t}{\theta}$$

$$f_T(t) = n \left(\frac{t}{\theta} \right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}, 0 < t < \theta$$

$$Eh(T) = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) \left(n \frac{t^{n-1}}{\theta^n} \right) dt = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \int_0^\theta h(t) t^{n-1} dt = 0$$

$$\Rightarrow h(\theta) \theta^{n-1} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$T = X(n)$ είναι επαρκής και πλήρης 6.6

$$E U(T) = 0 \quad \text{ή} \quad \int_0^\theta U(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = 0$$

$$\int_0^\theta U(t) t^{n-1} dt = \frac{\theta^{n+1}}{n} \xrightarrow{\text{παράγ}} U(\theta) \theta^{n-1} = \frac{n+1}{n} \frac{\theta^n}{\theta^{n+1}} \Rightarrow U(\theta) = \frac{n+1}{n} \theta$$

$$\text{Άρα } U(T) = \frac{n+1}{n} T = \frac{n+1}{n} X(n)$$

2ος τρόπος

$$E U(T) = 0$$

$$E T = E X(n) = \int_0^\theta t \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt = \frac{n}{\theta^n} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta$$

$$E T = \frac{n}{n+1} \theta \Rightarrow E \frac{n+1}{n} T = \theta$$

Λύση 2

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ i.i.d. } f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \theta \leq x$$

Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Α της παραμέτρου θ .

Λύση:

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)} = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{n\theta} \quad \left. \begin{array}{l} \theta \leq x_1 \\ \theta \leq x_n \end{array} \right\} \theta \leq \min \{x_i\} \Rightarrow \theta \leq x_{(1)}$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{n\theta} I_{(\theta, x_{(1)})}(\theta)$$

Συνεπώς, το επαρκές στατιστικό είναι $T = X_{(1)}$

* Όταν το θ είναι γνωστό στο κάτω τότε θα έχω το $x_{(1)}$
Ενώ όταν είναι γνωστό στο πάνω είναι το $x_{(n)}$

Θ.ν.δ.ο $T = X_{(1)}$ είναι και πλήρης

$$Eh(T) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty h(t) f_T(t) dt = 0 \quad *$$

Μέθοδος της α.ε.κ της κατανομής του $\min x_i$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(\min x_i \leq t) = 1 - P(\min x_i \geq t) = 1 - P(x_1 \geq t \dots x_n \geq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(x_i \geq t) = 1 - P^n(x \geq t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt} [1 - (1 - F_X(t))^n] = -n(1 - F_X(t))^{n-1} \frac{d}{dt} (1 - F_X(t)) \\ &= -n(1 - F_X(t))^{n-1} (-f_X(t)) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t)}$$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_0^t e^{-(x-\theta)} dx = e^\theta \int_0^t e^{-x} dx = e^\theta \cdot e^{-x} \Big|_0^t$$

$$F_X(t) = e^\theta [-e^{-t} + e^{-\theta}] = 1 - e^{-(t-\theta)}, \quad \theta \leq t$$

$$* \Rightarrow \int_0^\infty h(t) \cdot n(1 - 1 + e^{-(t-\theta)})^{n-1} \cdot e^{-(t-\theta)} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty h(t) e^{-n(t-\theta)} dt = 0 \Rightarrow \int_0^\infty h(t) e^{-nt} dt = 0 \Rightarrow -h(\theta) e^{-n\theta} = 0$$

$$\Rightarrow h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Συμπερασματικά, το $T = \min\{x_i\}$ επαρκής και πλήρης 6.6
Ψάχνω:

$$EU(T) = \theta \Rightarrow \int_0^\infty u(t) n e^{-n(t-\theta)} dt = \theta \Rightarrow \int_0^\infty u(t) e^{-nt} dt = \frac{\theta}{n} e^{-n\theta}$$

Παραγωγίζουμε οπότε έχουμε:

$$-u(\theta) e^{-n\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta}{n} e^{-n\theta} \right) \Rightarrow -u(\theta) e^{-n\theta} = \frac{e^{-n\theta}}{n} + \frac{\theta}{n} (-n) e^{-n\theta}$$

$$\Rightarrow u(\theta) = -\frac{e^{-n\theta}}{n e^{-n\theta}} + \frac{\theta e^{-n\theta}}{e^{-n\theta}} \Rightarrow u(T) = T - \frac{1}{n}$$

Άρα ΑΟΕΑ της θ είναι ο $X_{(1)} - \frac{1}{n}$.

Άσκηση 3

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από $\text{Exp}(\theta)$ δηλ. $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$

Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Α των $\frac{1}{\theta}$, θ .

Λύση:

Ελέγχω αρχικά αν μπορεί να γραφεί στην αυθαίρετη μορφή κατανομών $f(x|\theta) = c(\theta) h(x) e^{Q(\theta)T(x)} I_A(x)$, Α ανεξ. του θ .

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \theta & 1 & e^{-\theta} & x \end{array}$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum x_i} = g(T, \theta) h(x)^1$$

$T = \sum x_i$ είναι επαρκής G.6

$$\ln \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \ln [\theta^n e^{-\theta \sum x_i}] = n \ln \theta - \theta \sum x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = n \frac{1}{\theta} - \sum x_i = -n \left(\frac{\sum x_i}{n} - \frac{1}{\theta} \right)$$

Συνεπώς το $\frac{\sum x_i}{n}$ Α.Ο.Ε.Α της $\frac{1}{\theta}$

Ο παραπάνω τρόπος χρησιμοποιείται όταν θα έχω γραμμένες τις εκφράσεις του $\frac{1}{\theta}$ για να βρω Α.Ο.Ε.Α αυστηρή. Στο συγκεκριμένο η x μπορεί να βρω με την παραπάνω μεθοδολογία Α.Ο.Ε.Α του $\frac{1}{\theta}$ αλλά όχι Α.Ο.Ε.Α του θ .

Για να βρω Α.Ο.Ε.Α του θ πρέπει ν.δ.ο Τ επαρκής και πλήρης

$$E_U(T) = \theta$$

$$T = \sum x_i$$

$$E h(T) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \int h(t) \underbrace{f_T(t)}_{\text{G.N.N των } T=\sum x_i} dt = 0$$

β) Μέθοδος της παραγωγής

$$\begin{aligned} m_T(t) &= E(e^{tT}) = E(e^{t \sum x_i}) = E(e^{t(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}) = E(e^{tx_1 + tx_2 + \dots + tx_n}) \\ &= E(e^{tx_1} e^{tx_2} \dots e^{tx_n}) \stackrel{\text{ανεξ. } x_1, \dots, x_n}{=} \prod_{i=1}^n E(e^{tx_i}) = E^n(e^{tx}) = m_X^n(t) \end{aligned}$$

$$m_T(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t} \right)^n \quad t < \theta$$

$$m_T(t) = \left(\frac{\theta}{\theta(1-\frac{1}{\theta}t)} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{\theta}t \right)^{-n}, t < \theta \quad \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})$$

$$\text{Ανλ } \text{όταν } x_i \sim \text{Exp}(\theta) \Rightarrow \sum x_i \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})$$

$$* \Rightarrow \int_0^{\infty} h(t) \frac{t^{n-1} e^{-t\theta}}{(\frac{1}{\theta})^n \Gamma(n)} dt = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} h(t) t^{n-1} e^{-t\theta} dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

Άρα T είναι πλήρης και επαρκής με $T \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})$

$$\int_0^{\infty} v(t) \frac{t^{n-1} e^{-t\theta}}{(\frac{1}{\theta})^n \Gamma(n)} dt = 0$$

$$\dot{h} E\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$T \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})$$

$$E T \stackrel{\text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})}{=} n \frac{1}{\theta} \Rightarrow E \frac{T}{n} = \frac{1}{\theta} \quad \text{Άρα } \frac{T}{n} \text{ A.O.E.A της } \frac{1}{\theta}$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{T}\right) &= \int \frac{1}{t} f_T(t) dt \stackrel{\text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\theta})}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \frac{t^{n-1} e^{-t\theta}}{(\frac{1}{\theta})^n \Gamma(n)} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2} e^{-t\theta}}{(\frac{1}{\theta})^n \Gamma(n)} dt \\ &= \frac{(\frac{1}{\theta})^{n-1} \Gamma(n-1)}{(\frac{1}{\theta})^n \Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-2} e^{-t\theta}}{(\frac{1}{\theta})^{n-1} \Gamma(n-1)} dt = \frac{\theta^n \Gamma(n-1)}{\theta^{n-1} \Gamma(n)} = \frac{\theta \Gamma(n-1)}{(n-1) \Gamma(n-1)} = \frac{\theta}{n-1} \\ &\quad \text{μοιάζει με Γάμμα}(n-1, \theta) \end{aligned}$$

Άρα $E\left(\frac{n-1}{T}\right) = \theta$. Το $\frac{n-1}{T}$ είναι A.O.E.A ευτυχώς του θ .

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Ευτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π)

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ Τ.δ από έναν πληθυσμό με β.π.η ή β.π. $f(x|\theta)$ (θ : άγνωστη αλλά σταθερή παράμετρος) τότε η συνάρτηση ως προς θ $L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ λέγεται συνάρτηση πιθανοφάνειας (αυτιάεισθ' είναι η από κοινού των $(x_1, \dots, x_n)$)

Ο Ε.Μ.Π αναβοδίδεται με $\hat{\theta}$ να είναι εκείνο το θ για το

οποίο μεγιστοποιείται τη βωρότητα πιθανοφάνειας

Παρατηρήσεις:

- ① Υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει ο Ε.Μ.Π, υπάρχει περίπτωση να είναι μοναδικός και υπάρχει περίπτωση να είναι περιβόρε-ποι του εώς
- ② Είναι πολύ εύκολο αντί να μεγιστοποιώ τη βωρότητα πιθανοφάνειας να μεγιστοποιώ το λογάριθμο της $\log L(\theta/x)$

Π.Χ.1

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1/\theta)$ δηλ. $f(x/\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x > 0$
Θέλω να βρω Ε.Μ.Π του θ .

Λύση:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x_i} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum x_i}$$

$$\log L = -n \log \theta - \frac{1}{\theta} \sum x_i$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum x_i$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum x_i = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\theta^2} = \frac{n}{\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\sum x_i}{n} = \hat{\theta}}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} \right|_{\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n}} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum x_i}{\theta^3} \Big|_{\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n}} = \frac{n}{(\frac{\sum x_i}{n})^2} - \frac{2 \sum x_i}{(\frac{\sum x_i}{n})^3} = \frac{n^3}{(\sum x_i)^2} - \frac{2n^3}{(\sum x_i)^2} = -\frac{n^3}{(\sum x_i)^2} < 0$$

* Τις περιπτώσεις αυτές ο Ε.Μ.Π είναι βωρότητα του εσθμους βωστικμω

Π.Χ.2

$X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$ $f(x/\theta) = \frac{1}{\theta}$ $0 < x < \theta$

Να βρεθεί Ε.Μ.Π

Λύση:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 < x_i < \theta \\ 0 < x_n < \theta \end{array} \right\} x_{(n)} < \theta$$

$$\log L = -n \log \theta$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} < 0$$

Αρα $\log L$ φθίνουσα συνάρτηση ως προς θ

Αρα είναι φθίνουσα παίρνει μέγιστο στο κάτω άκρο του Π.Ο
 δηλ $\hat{\theta} = x(n)$

π.χ. 3

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d } N(\mu, \sigma^2) \quad f(x|\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$$

$$L = \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \stackrel{\sigma^2=\varphi}{=} -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \varphi - \frac{1}{2\varphi} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\varphi} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)(-1) = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \varphi} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \varphi} = 0 \stackrel{\partial \mu = \hat{\mu}}{\Rightarrow} -\frac{n}{2\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow \boxed{\hat{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|l} \overset{A}{\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2}} & \overset{\Gamma}{\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu \partial \varphi}} & \text{Για } \theta = \hat{\theta} \text{ άρα } \mu = \hat{\mu}, \varphi = \hat{\varphi} \\ \overset{\Gamma}{\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu \partial \varphi}} & \overset{B}{\frac{\partial^2 \log L}{\partial \varphi^2}} & A < 0 \text{ (Γ < 0)} \\ & & B^2 - A\Gamma < 0 \end{array} \right]$$

Άσκηση (H.W)

$$X_1, \dots, X_n \quad f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \theta \leq x$$

Να βρεθεί Ε.Μ.Π για το θ

Γνωρίζουμε ότι: $T^* = E_{\theta|x}[g(\theta) | x_1, \dots, x_n]$

$$R(\hat{g}, d) = E_{\theta} R(\theta, d)$$

$$R(\theta, d) = E_{x|\theta} L(\theta, d)$$

Ο ευγενής Bayes ελαχιστοποιεί ως προς d την $E_{\theta|x} L(\theta, d)$ *

όπου $L = T.S : E_{\theta|x} g(\theta)$ *

$L = A.S : \text{median } g(\theta|x)$ (συνέκρουση)

* : πρέπει να γνωρίζω απόδειξη, μας παρουσιάζουν.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας ευγενής d^* ονομάζεται minimax όταν:

$$\max_{\theta} R(d^*, \theta) \leq \max_{\theta} R(\theta, d) \quad \forall d \in D$$

ελαχιστοποιεί τη μέγιστη ζημία

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν d^* είναι ένας ευγενής Bayes της $g(\theta)$, όπου η πυκνότητα προέρχεται από την $g(\theta)$ και η συνάρτηση διακινδυνεύσεων $R(g(\theta), d^*) = c$ είναι σταθερή τότε d^* είναι minimax

Απόδειξη: Θ.δ.ο d^* είναι minimax. Αρκεί ν.δ.ο $\max_{\theta} R(d^*, \theta) \leq \max_{\theta} R(\theta, d) \quad \forall d \in D$

$$g(\theta) = \theta \quad (c \int_0^1 \theta d\theta = c \cdot \frac{1}{2})$$

$$\max_{\theta} R(d^*, \theta) = c = \int_0^1 c \theta d\theta = \int_0^1 R(\theta, d^*) \theta d\theta = E_{\theta} R(\theta, d^*) = R(\hat{g}, d^*) \leq R(\hat{g}, d)$$

$$= E_{\theta} R(\theta, d) = \int_0^1 R(\theta, d) \theta d\theta \leq \int_0^1 \max_{\theta} R(\theta, d) \theta d\theta \leq \max_{\theta} R(\theta, d) \cdot \int_0^1 \theta d\theta$$

Παράδειγμα

① $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από την $B(1, \theta)$

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x=0,1, \quad f(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}, 0 < \theta < 1$$

$\hookrightarrow$ Βήτα

$$L \text{ to T.S. } = (1-\theta)^2$$

Να βρεθούν: ο ευγενής Bayes της θ και να ελεγχτεί αν είναι minimax

Λύση: $f(\theta|x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)} \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}, 0 < \theta < 1$

Άρα, $f(\theta|x) \propto \theta^{\sum x_i + a - 1} (1-\theta)^{b - \sum x_i + n - 1}, 0 < \theta < 1$

$\theta|x \sim \text{Βήτα}(\sum x_i + a, b + n - \sum x_i)$

$$\text{δηλ. } f(\theta|x) = \frac{\sum x_i + a - 1}{\theta} \frac{\theta + n - \sum x_i - 1}{(1-\theta)} \\ B(\sum x_i + a, \theta + n - \sum x_i)$$

$$\text{Ευρημής Bayes} = d^* = E_{\theta|x} \theta \stackrel{\text{τυρολόγιο}}{=} \frac{\sum x_i + a}{\sum x_i + a + \theta + n - \sum x_i} = \frac{\sum x_i + a}{a + \theta + n}$$

(Από τον ορισμό του d^* είναι... αν δες που δινόταν ο $*$) έπρεπε να την αναδείξω)

* Εξετάζω τότε είναι minimax ευρημής δηλ.

① Να εξετάσω τότε $R(\theta, d^*)$ είναι σταθερή

$$R(\theta, d^*) = E_{x|\theta} L(\theta, d^*) = E_{x|\theta} (\theta - d^*)^2 = E_{x|\theta} \left(\theta - \frac{\sum x_i + a}{a + \theta + n} \right)^2 \quad \underline{EY^2 = \text{Var}Y + (EY)^2}$$

$$= \text{Var}_{x|\theta} \left[\theta - \frac{\sum x_i + a}{a + \theta + n} \right] + \left[E_{x|\theta} \left(\theta - \frac{\sum x_i + a}{a + \theta + n} \right) \right]^2$$

$$\eta \text{ Τ.Η} = x|\theta \xrightarrow{\text{σταθ.}} \text{Var}_{x|\theta} \theta = 0$$

$$\stackrel{***}{=} \frac{\text{Var}(\sum x_i + a)}{(a + \theta + n)^2} + \left(\theta - \frac{1}{a + \theta + n} (\sum E x_i + a) \right)^2$$

$$= \frac{\text{Var} \sum x_i}{(a + \theta + n)^2} + \left(\theta - \frac{1}{a + \theta + n} (\sum \theta + a) \right)^2 \quad (E x_i = \theta)$$

$$= \frac{\sum \text{Var} x_i}{(a + \theta + n)^2} + \left(\theta - \frac{1}{a + \theta + n} (n\theta + a) \right)^2$$

$$\stackrel{\text{τοια}}{=} \frac{\sum \theta(1-\theta)}{(a + \theta + n)^2} + \left(\theta - \frac{1}{a + \theta + n} (n\theta + a) \right)^2$$

$$x|\theta \sim B(1, \theta) = \frac{n\theta(1-\theta)}{(a + \theta + n)^2} + \left(\theta - \frac{1}{a + \theta + n} (n\theta + a) \right)^2 = R(\theta, d^*)$$

$$R(\theta, d^*) = \frac{n\theta - n\theta^2}{(a + \theta + n)^2} + \frac{[\theta(a + \theta + n) - (n\theta + a)]^2}{(a + \theta + n)^2} = \dots \quad \text{εξετάζω τις ηράεις για να το γράψω στην μορφή: } A_1\theta^2 + A_2\theta + A_3$$

όταν $A_1 = A_2 = 0$ τότε είναι σταθερή

$$\text{εδώ } a = b = \frac{\sqrt{n}}{2} \quad \text{τότε } d^* = \text{minimax}$$

$R(\theta, d^*) =$ είναι σταθερή για την επιλογή a, b :

άρα είναι και minimax

$$a = b = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

(Ασκ. 10 εμπειρικά)

② $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. από την $B(1, \theta)$

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x=0,1, \quad f(\theta)=1, \quad 0 < \theta < 1 \quad \theta \sim U(0,1)$$

$$L = \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}$$

Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes και να ελεγχτεί τότε ένα minimax

Λύση: Για τον εκτιμητή Bayes: ελαχιστοποιώ ως προς d την $E_{\theta|x} L(\theta, d)$ δηλ. $\min_{\theta} E_{\theta|x} L(\theta, d) = \min_d \int L(\theta, d) f(\theta|x) d\theta$

$$\min_d \int \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} f(\theta|x) d\theta \quad (\text{προσχηφισμός να δώσω } = 0)$$

$$2 \int \frac{d-\theta}{\theta(1-\theta)} f(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow \int \frac{d}{\theta(1-\theta)} f(\theta|x) d\theta = \int \frac{\theta}{(1-\theta)\theta} f(\theta|x) d\theta$$

$$\Rightarrow d^* = \frac{\int \frac{1}{1-\theta} f(\theta|x) d\theta}{\int \frac{1}{\theta(1-\theta)} f(\theta|x) d\theta}$$

$$f(\theta|x) \propto \theta^{2x_i} (1-\theta)^{n-2x_i}$$

Αρα $\theta|x \sim B(2x_i+1, n-2x_i+1)$

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{2x_i+1-1} (1-\theta)^{n-2x_i+1-1}}{B(2x_i+1, n-2x_i+1)}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Για } a=b=1 \text{ είναι ίδια})$$

$$d^* = \frac{\int_0^1 \frac{1}{1-\theta} \theta^{2x_i+1-1} (1-\theta)^{n-2x_i+1-1} d\theta}{\int_0^1 \frac{1}{\theta(1-\theta)} \theta^{2x_i+1-1} (1-\theta)^{n-2x_i+1-1} d\theta} = \frac{\int_0^1 \theta^{2x_i+1-1} (1-\theta)^{n-2x_i+1-1} d\theta}{\int_0^1 \theta^{2x_i+1-1} (1-\theta)^{n-2x_i+1-1} d\theta}$$

για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των εξισώσεων που θυμίζει κάποια κατανομή

$$= \frac{B(2x_i+1, n-2x_i)}{B(2x_i, n-2x_i)}$$

$$\text{Ισχύει ότι } B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$d^* = \frac{\frac{\Gamma(2x_i+1)\Gamma(n-2x_i)}{\Gamma(n+1)}}{\frac{\Gamma(2x_i)\Gamma(n-2x_i)}{\Gamma(n)}} = \frac{\Gamma(2x_i+1)}{\Gamma(2x_i)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n-1)}$$

$$= \frac{2(x_i+1-1)\Gamma(2x_i)}{\Gamma(2x_i)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)(n+1-1)} = \frac{2x_i}{n} = d^*$$

$$\begin{aligned}
 R(\theta, d^*) &= E_{x|\theta} L(\theta, d^*) = E_{x|\theta} \left[\frac{(d^* - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} \right] = \frac{1}{\theta(1-\theta)} E_{x|\theta} (d^* - \theta)^2 \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \text{Var}_{x|\theta} (d^* - \theta) + (E_{x|\theta} (d^* - \theta))^2 \right\} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \text{Var} d^* + \left(E d^* - \theta \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \text{Var} \frac{\sum x_i}{n} + \left(E \frac{\sum x_i}{n} - \theta \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum \text{Var}_{x_i|\theta} + \left(\frac{1}{n} \sum E_{x_i|\theta} - \theta \right)^2 \right\} = \left(\frac{x \sim B(1, \theta)}{\text{Var} = \theta(1-\theta)} \right) \\
 &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left\{ \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} + \left(\frac{n\theta - \theta}{n} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \frac{1}{n} = \text{εωδότηση} \\
 &= \text{minimax}
 \end{aligned}$$

③ (Άσκ 11 - εμπειρογνώστης)

Έστω X τ.λ. $x \sim B(n, \theta)$ δηλ. $f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$, $x=0, \dots, n$

$J(\theta) = 1$, $0 < \theta < 1$

$L = T.S = (d - \theta)^2$

Να βρεθεί ο ευρύτερης Bayes της θ , να εφευρεθεί αν είναι minimax και να υπολογιστεί η Bayes ευρύτερης υπόθεσης $R(\hat{\theta}, \theta)$

Λύση:

Έχουμε δείξει ότι:

$d^* = E_{\theta|x} \theta \leftarrow (\theta \text{ είναι απόδοξη})$

$J(\theta|x) \propto \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$, $0 < \theta < 1$

$\theta|x \sim \text{Beta}(x+1, n-x+1)$

θ, τ, λ
= given τ, λ

$J(\theta|x) = \frac{\theta^{x+1-1} (1-\theta)^{n-x+1-1}}{B(x+1, n-x+1)}$

$$\int \theta \cdot \frac{J(\theta|x)}{J(\theta)} d\theta$$

$d^* = E_{\theta|x} \theta = \frac{\text{πυκνότητα}}{E(\theta)} = \frac{\frac{1}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2)} \frac{x+1}{x+1+n-x+1}}{\frac{1}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2)}} = \frac{x+1}{n+2}$

$d^* = \frac{x+1}{n+2}$

Για να είναι minimax: $R(\theta, d^*) = \text{εωδότηση}$

$$R(\theta, d^*) = E_{x|\theta} (d^* - \theta)^2 = \text{Var}_{x|\theta} (d^* - \theta) + (E_{x|\theta} d^* - \theta)^2 = \text{Var}_{x|\theta} d^* + (E_{x|\theta} d^* - \theta)^2$$

$$= \text{Var } \frac{x_{t+1}}{n_{t+2}} + \left(E \frac{x_{t+1}}{n_{t+2}} - \theta \right)^2 \stackrel{\text{Total}}{=} \frac{n\theta(1-\theta)}{(n_{t+2})^2} + \left(\frac{n\theta+1}{n_{t+2}} - \theta \right)^2$$

$$= \frac{n\theta - n\theta^2 + [n\theta + 1 - n\theta - 2\theta]^2}{(n+2)^2} = \frac{n\theta - n\theta^2 + (1 - 2\theta)^2}{(n+2)^2} = \frac{n\theta - n\theta^2 + 1 - 4\theta + 4\theta^2}{(n+2)^2}$$

$$\frac{-(n-4)\theta - (n-4)\theta^2 + 1}{(n+2)^2} \quad | n=4 |$$

Development
united world
Basis

$$R(\hat{\gamma}, d^*) = E_{\theta} R(\theta, d^*) = E_{\theta} \frac{(n-4)\theta - (n-4)\theta^2 + 1}{(n+2)^2} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} R(\theta, d^*) &= E_{x|\theta} L(\theta, d^*) = E_{x|\theta} (d^* - \theta)^2 = E_{x|\theta} \left(\frac{x+1}{n+2} - \theta \right)^2 \\ &= \text{Var} \left(\frac{x+1}{n+2} - \theta \right) + \left(E \frac{x+1}{n+2} - \theta \right)^2 = \frac{(n-4)\theta - (n-4)\theta^2 + 1}{(n+2)^2} \end{aligned}$$

$$(2*) R(y, d^{2*}) = \frac{(n-4)}{(n+2)^2} E_0 \Theta - \frac{n-4}{(n+2)^2} E_0 \Theta^2 + \frac{1}{(n+2)^2}$$

$$E_{\theta}(g(\theta)) = \int_0^1 \theta d\theta = \frac{1}{2}$$

$$E\theta^2 = \int_0^1 \theta^2 d\theta = \frac{1}{3}$$

$$= \text{Var}\theta + (E\theta)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Revisão: $E_0 \theta = \int \theta f(\theta) d\theta$
 n Tunoziglo

④ (Agar 12.6m per 1065m)

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \tau, \omega \quad X|\theta \sim N(\theta, 1)$$

$$f(x|\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\theta \sim N(0, 1)$$

$$f(\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$j(\theta/x) \propto e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \theta)^2} e^{-\frac{1}{2} \theta^2} \Rightarrow j(\theta/x) \propto e^{-\frac{1}{2} (n+1) (\theta^2 - 2\theta / \frac{\sum x_i}{n+1})}$$

$$\theta/x \sim N\left(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$L = T \cdot \Sigma$$

$$d^2 - E_{\theta/x} \theta = \frac{\sum x_i^2}{n+1}$$

Να υπολογιστεί η βελτιστή τιμή του Bayes ($R(\hat{\theta}, d^*)$)

$$R(\hat{\theta}, d^*) = E[R(\theta, d^*)]$$

$$R(\theta, d^*) = E_{x|\theta} L(\theta, d^*)$$

$$R(\theta, d^*) = E_{x|\theta} L(\theta, d^*) = E_{x|\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n+1} - \theta \right)^2$$

$$= \text{Var} \left(\frac{\sum x_i}{n+1} - \theta \right) + \left(E \frac{\sum x_i}{n+1} - \theta \right)^2 = \text{Var}_{x|\theta} \frac{\sum x_i}{n+1} + \left(\frac{\sum E_{x|\theta} x_i}{n+1} - \theta \right)^2$$

$$= \frac{\sum \text{Var} x_i}{(n+1)^2} + \left(\frac{\sum \theta}{n+1} - \theta \right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2} + \left(\frac{n\theta}{n+1} - \theta \right)^2 = \frac{n+\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$R(\hat{\theta}, d^*) = E_{\theta} R(\theta, d^*) = E_{\theta} \frac{n+\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n + E\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n + \text{Var}\theta + (E\theta)^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+1+0}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

Ασκησης:

1) $X_1, \dots, X_n \sim \delta$ στο $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}$, $0 < x < \theta$

$$g(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1$$

Να βρεθεί ο Bayes επισημότητας για το θ όταν

i) $L = (d - \theta)^2$

ii) $L = \frac{(d - \theta)^2}{\theta^2}$

2) $X_1, \dots, X_n \sim \delta$ $P(\theta)$ $f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$

$$g(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \geq 0$$

Να βρεθεί ο επισημότητας Bayes (T.2) για τις πιθανότητες

$$g(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{k!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\uparrow P_{x|\theta}(x=k)$$

Aufgabe 1

$$x_1, \dots, x_n \sim \theta \quad f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta$$

$$g(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1$$

$$i) L = (d - \theta)^2 \quad ii) L = \frac{(d - \theta)^2}{\theta^2}$$

Lösung

$$g(\theta|x) \propto g(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

$$g(\theta|x) = \frac{g(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int_{x(n)} g(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{1 \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2}}{\int_{x(n)} 1 \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2} d\theta} \quad \left. \begin{array}{l} 0 < x_1 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \\ 0 < \theta < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_n, 0\} < \theta < 1$$

$$x(n) < \theta < 1$$

$$= \frac{1}{\theta^{2n}} = \frac{\theta^{-2n}}{\int_{x(n)} \theta^{-2n} d\theta} = \frac{\theta^{-2n}}{\left. \frac{\theta^{-2n+1}}{(-2n+1)} \right|_{x(n)}^1} = \frac{1}{(2n-1)} \left[1 - x(n)^{-2n+1} \right] = \frac{\theta^{-2n} (2n-1)}{(x(n)^{-2n+1} - 1)}, \quad x(n) < \theta < 1$$

$$ii) d^* = E_{\theta|x} \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta g(\theta|x) d\theta = \int_{x(n)}^1 \theta \theta^{-2n} d\theta \stackrel{C = \frac{2n-1}{x(n)^{-2n+1} - 1}}{=} C \int_{x(n)}^1 \theta^{-2n+1} d\theta$$

$$= C \left. \frac{\theta^{-2n+2}}{-2n+2} \right|_{x(n)}^1$$

$$\Delta n) d^* = \frac{2n-1}{2n-2} \frac{x(n)^{-2n+2} - 1}{x(n)^{-2n+1} - 1}$$

$$ii) L = \frac{(d - \theta)^2}{\theta^2}$$

$$\min_d \int \frac{(d - \theta)^2}{\theta^2} g(\theta|x) d\theta$$

Προσχηματίζουμε ως προς d να πάρουμε 0

$$2 \int \frac{(d - \theta)}{\theta^2} g(\theta|x) d\theta = 0 \quad \text{h} \quad d \int \frac{1}{\theta^2} g(\theta|x) d\theta - \int \frac{1}{\theta} g(\theta|x) d\theta = 0$$

$$d^* = \frac{\int \frac{1}{\theta} g(\theta|x) d\theta}{\int \frac{1}{\theta^2} g(\theta|x) d\theta}$$

20/06/2025

$$d^* = \frac{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta} \theta^{-2n} d\theta}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^2} \theta^{-2n} d\theta} = \frac{\int_{x(n)}^1 \theta^{-2n-1} d\theta}{\int_{x(n)}^1 \theta^{-2n-2} d\theta} = \frac{2n+1}{2n} \frac{x(n)^{-2n} - 1}{x(n)^{-2n-1} - 1}$$

Άλλος Τρόπος

$$f(\theta/x) \propto f(\theta) \prod p(x_i/\theta) = \prod \frac{2x_i}{\theta^2}$$

Άρα

$$f(\theta/x) \propto \theta^{-2n} \quad \eta \quad f(\theta/x) = C \cdot \theta^{-2n}, \quad x(n) < \theta < 1$$

Για την σταθερά πρέπει να ισχύει $f(\theta/x) \geq 0$

$$\int_{x(n)}^1 C \theta^{-2n} d\theta = 1$$

$$\text{Αντ. } C = \frac{1}{\int_{x(n)}^1 \theta^{-2n} d\theta}$$

Άσκηση 2

$$x_1, \dots, x_n \text{ i.i.d } P(\theta) \quad f(x/\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x=0,1,\dots$$

$$f(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \geq 0$$

$$\text{Να βρεθεί ο ευρ. Bayes όταν } g(\theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} = P(X=k/\theta)$$

$$\text{T.S } L=(\theta-\theta^2)^2$$

Λύση

$$E_{\theta/x}(g(\theta)) = d^*$$

$$f(\theta/x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n p(x_i/\theta) = e^{-\theta} \theta^{2x_1} e^{-n\theta} = e^{-(n+1)\theta} \theta^{2x_1+1}, \quad \theta \geq 0$$

$$\text{Γράφω } (2x_1+1, \frac{1}{n+1}) \quad f(\theta/x) = \frac{\theta^{2x_1+1} e^{-(n+1)\theta}}{(\frac{1}{n+1})^{2x_1+1} \Gamma(2x_1+1)}, \quad \theta \geq 0$$

$$E_{\theta/x}(g(\theta)) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} \frac{\theta^{2x_1+1} e^{-(n+1)\theta}}{(\frac{1}{n+1})^{2x_1+1} \Gamma(2x_1+1)} d\theta = \frac{(n+1)^{2x_1+1}}{k! \Gamma(2x_1+1)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{2x_1+k+1} e^{-(n+1)\theta}}{e^{-(n+1)\theta}} d\theta$$

$$= \frac{(n+1)^{2x_1+1}}{k! \Gamma(2x_1+1)} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{2x_1+k+1} \frac{\Gamma(2x_1+k+1)}{\Gamma(2x_1+1)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{2x_1+k+1} e^{-(n+1)\theta}}{(\frac{1}{n+1})^{2x_1+k+1} \Gamma(2x_1+k+1)} d\theta \xrightarrow{\text{Γράφω}} (2x_1+k+1, \frac{1}{n+1})$$

$$= \frac{(n+1)^{\sum x_i + 1}}{(n+2)^{\sum x_i + 1}} \frac{\Gamma(\sum x_i + k + 1)}{k! \Gamma(\sum x_i + 1)} = \frac{(n+1)^{\sum x_i + 1}}{(n+2)^{\sum x_i + 1}} \frac{(\sum x_i + k)!}{\sum x_i!}$$

$$\Gamma(\sum x_i + k + 1) = (\sum x_i + k) \Gamma(\sum x_i + k) = (\sum x_i + k) (\sum x_i + k - 1) \Gamma(\sum x_i + k - 1)$$

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ από έναν πληθυσμό με β.π.π ή β.π $f(x|\theta)$ όπου θ άγνωστη αλλά σταθερή ποσότητα. Ζητάμε ένα διάστημα $(L(x), U(x))$ τ.ω $P(L(x) < \theta < U(x)) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta$
 ακαί (συνήθως $\alpha = 0.01$ ή 0.05 ή 0.1)

ΕΡΜΗΝΕΙΑ: Εάν επαναλάβουμε το πείραμα ευστό φορές και υπολογίσουμε αυτά τα διαστήματα περιμένουμε τη σχετική συχνότητα των διαστημάτων που περιέχουν την αληθινή τιμή να είναι $1 - \alpha$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ από έναν πληθυσμό με β.π.π ή β.π $f(x|\theta)$ όπου θ άγνωστη αλλά σταθερή ποσότητα. Έστω επίσης $Q(x, \theta) = Q$ μια β.β των $x_1, \dots, x_n$ και του θ .

1) Θέλουμε τη κατανομή του Q να είναι ανεξάρτητη του θ

2) Αν έχουμε $P(q_1 < Q(x, \theta) < q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$

τότε το Q λέγεται αντιστρέπτει ή ποσότιμη

Παρατήρηση 1: Μεταξύ Δ.Ε με τον ίδιο βαθμό εφικτικότητας το καλύτερο είναι εκείνο που ελαχιστοποιεί το μήκος.

π.χ! $x_1, \dots, x_n$ τ.δ $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 άγνωστή. Να βρείτε Δ.Ε για το μ .
 (Ξεκινάμε με την εφαρμογή β.β $T = \sum x_i$)

$$\sum x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow \frac{\sum x_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P(q_1 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$P(q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$P(-\bar{x} + q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{x} + q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$P(\bar{x} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$\text{ΜΗΚΟΣ Δ.Ε.} = (q_2 - q_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\bar{x} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ όταν } q_1, q_2 \text{ ικανοποιούν την } (1)$$

Θέλω να ελαχιστοποιήσω το ΜΗΚΟΣ

$Q \sim N(0, 1)$

$$f_Q(q) = (2\pi)^{-1/2} e^{-q^2/2}$$

$$\text{Μήκος} = (q_2 - q_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1 \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha \quad Q \sim N(0, 1)$$

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1 - \alpha$$

$$\frac{d}{dq_1} F_Q(q_2) - \frac{d}{dq_1} F_Q(q_1) = 0$$

$$f_Q(q_2) \frac{dq_2}{dq_1} - f_Q(q_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)}}$$

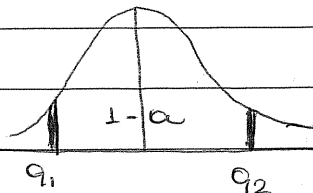
$$\frac{d}{dq_1} F_Q(q_2) = \frac{d}{dq_2} F_Q(q_2) \frac{dq_2}{dq_1}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} - 1 \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(\frac{(2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}q_1^2}}{(2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}q_2^2}} - 1 \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}q_1^2}}{e^{-\frac{1}{2}q_2^2}} - 1 \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}q_2^2} = e^{-\frac{1}{2}q_1^2} \Rightarrow q_2^2 = q_1^2 \Rightarrow q_2 = \pm q_1 \Rightarrow q_2 = -q_1$$

και

Αρα $q_1 = -q_2$



Επομένως, το q_2 είναι εκείνο το

σημείο για το οποίο $P(Q \geq q_2) = \alpha/2$

$$Q \sim N(0,1) \quad q_2 = z_{\alpha/2}$$

$$\Delta E \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Π.Χ. 2

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 : άγνωστη. Ζητείται ΔΕ για το μ .

Λύση: Δείχνει ότι $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\Gammaνωρίζω ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_v &= \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_v^2/v}} & F_{v_1, v_2} &= \frac{\chi_{v_1}^2/v_1}{\chi_{v_2}^2/v_2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{άρα, } \frac{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} \sim t_{n-1}$$

$$\text{Συνεπώς } Q = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha \dots P\left(\bar{x} - q_2 \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} - q_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$l = MHFO2 = (q_2 - q_1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1 \right) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Δείχνω γαρά ότι } \frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} - 1 \right) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$f_Q(q_1) = f_Q(q_2) \text{ when } \frac{dL}{dq_1} = 0$$

$$q_1 = q_2 \text{ endp.}$$

$$q_1 = -q_2 \text{ Seuring}$$

$$P(-q_2 < Q < q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(Q \leq q_2) = \alpha/2 \quad P(Q \geq q_2) = \alpha/2$$

$$q_2 = t_{n-1, \alpha/2}$$

$$\Delta E: \left(\bar{x} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad x_1, \dots, x_n \sim \text{i.i.d. } N(\mu, \sigma^2) \quad \mu: \text{ known} \\ (\sum x_i, \sum x_i^2) \quad (\mu, \sigma^2)$$

$$\Delta E \text{ dep. on } \sigma^2$$

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(q_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{q_1} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{q_2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right) = 1 - \alpha$$

$$L = (n-1)S^2 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right)$$

$$\frac{dL}{dq_1} = (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \frac{dq_2}{dq_1} \right)$$

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1 - \alpha$$

$$f_Q(q_2) \frac{dq_2}{dq_1} - f_Q(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)}$$

Apr

$$\frac{dL}{dq_1} = (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} \right) \frac{Q \sim \chi_{n-1}^2}{\text{Gamma}(\frac{n-1}{2}, 2)} \quad (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \frac{q_1^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-q_1/2}}{q_2^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-q_2/2}} \right)$$

$$= (n-1)S^2 \left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{q_1^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-q_1/2}}{q_2^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-q_2/2}} \right)$$

$$= (n-1)S^2 \left[\frac{q_1^{\frac{n-1}{2}+1} e^{-q_1/2} - q_2^{\frac{n-1}{2}+1} e^{-q_2/2}}{q_1^2 q_2^{\frac{n-1}{2}+1} e^{-q_2/2}} \right]$$

$$\frac{dL}{dq_1} = 0 \Rightarrow q_1^{\frac{n-1}{2}+1} e^{-q_1/2} = q_2^{\frac{n-1}{2}+1} e^{-q_2/2} \quad \mu \in q_1, q_2 \in \omega$$

$$P(q_1 < a < q_2) = 1 - a$$

Παρατηρώ ότι δεν μπορώ να το λύσω

Δ.Ε. Ισών ουρών

$$\text{Επιλέγω τα } q_1, q_2 \text{ τ/ω } P(a \leq q_1) = a/2$$

$$P(a \geq q_2) = a/2$$

$$q_2 = \chi^2_{n-1, a/2}$$

$$q_1 = \chi^2_{n-1, 1-a/2}$$

* Όταν έχω χ^2 ή Γάμμα κατανομή πάντα Δ.Ε. ισών ουρών

* Αν η $f_a(q)$ είναι αύξουσα τότε το μήκος L είναι φθίνουσα συνάρτηση και παραγωγίζω ως προς q_2

Αν η $f_a(q)$ είναι φθίνουσα τότε το μήκος L είναι αύξουσα και παραγωγίζω ως προς q_1

* Υπάρχουν ΠΑΝΤΑ αντιστρέφτες τοποδοτήσεις;

Ναι, υπάρχουν πάντα αντιστρέφτες τοποδοτήσεις όταν έχουμε τ.δ. στο κτηνολογικό με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

20/11/2019

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αντιστρέφτες τοποδοτήσεις υπάρχουν πάντα όταν η α.β.ε της τ.μ. είναι συνεχής. Θ.δ.ο

$$\bullet Y_1 = F_X(x) \sim U(0, 1)$$

$$\bullet Y_2 = 1 - F_X(x) \sim U(0, 1)$$

$$\bullet Y_3 = -\log Y_1 \sim \text{Exp}(1)$$

$$\bullet Y_4 = -\log Y_2 \sim \text{Exp}(1)$$

Με βάση τα προηγούμενα θα μπορούσε να αποδειχθεί τα εξής:

$$\blacktriangleright -2 \sum_{i=1}^n \log F(x_i; \theta) \sim \chi^2_{2n}$$

$$\blacktriangleright -2 \sum_{i=1}^n \log (1 - F(x_i; \theta)) \sim \chi^2_{2n}$$

Απόδειξη

Μέθοδος της α.α.κ

$$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \leq y) = P(F_X(x) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y, 0 < y < 1$$

Εστω $Z \sim U(0,1)$

$$f_2(z) = 1, 0 < z < 1$$

$$F_2(z) = \int_0^z 1 dy = z, 0 < z < 1$$

Αρα $Y_1 \sim U(0,1)^0$

$$\begin{aligned} F_{Y_2}(y) &= P(Y_2 \leq y) = P(1 - F_X(x) \leq y) = P(F_X(x) \geq 1 - y) = 1 - P(F_X(x) \leq 1 - y) \\ &= 1 - P(Y_1 \leq 1 - y) = 1 - F_{Y_1}(1 - y) = 1 - (1 - y) = \cancel{1 - 1} + y = y, 0 < y < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Y_3}(y) &= P(-\log Y_1 \leq y) = P(\log Y_1 \geq -y) = P(Y_1 \geq e^{-y}) = 1 - P(Y_1 \leq e^{-y}) \\ &= 1 - F_{Y_1}(e^{-y}) = 1 - e^{-y}, y > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ευθ(1)} \quad f_2(z) = e^{-z}, z > 0$$

$$F_2(z) = \int_0^z e^{-x} dx = 1 - e^{-z}, z \geq 0$$

• $F_{Y_4}(y) = \dots$ παύει...

$$\begin{aligned} \text{Εστω } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ τ.δ. και } Z_1 &= \sum_{i=1}^n Y_{3i} = -\sum_{i=1}^n \log F_X(x_i) \\ Z_2 &= \sum_{i=1}^n Y_{4i} = -\sum_{i=1}^n \log (1 - F_X(x_i)) \end{aligned}$$

Αρα πρέπει να έρω την κατανομή

$$Z = \sum_{i=1}^n W_i \text{ όπου } W_i \sim \text{Ευθ(1)}$$

$$W_1, \dots, W_n \sim \text{Ευθ(1)}$$

$$m_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(W_1 + \dots + W_n)}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tW_i}) \stackrel{W_i \sim \text{Ευθ(1)}}{=} m_W^n(t) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^n, t < 1$$

$$= (1-t)^{-n}, t < 1 \quad \text{Γάμμα}(a=n, b=1)$$

Αρα $Z_1, Z_2 \sim \text{Γάμμα}(a=n, b=1)$ ανεξ. της παραμέτρου θ.

Ξέρω ότι $Z_1 \sim \text{Γάμμα}(n, 1)$

Τι ακολουθεί η Z_2 ;

Βρίσκω την κατανομή της Z_2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο

Των πολλαπλασιαστών.

$$m_{2,1}(t) = E(e^{t2,1}) = E(e^{(t,2)Z_1}) = m_{2,1}(2t) = (1-2t)^{-n}, 2t < 1$$

$$\text{Άρα } m_{2,1}(t) = (1-2t)^{-n}, t < 1/2$$

$$\text{Γάμμα } (a=n, \beta=2) \equiv \chi^2_{2n}$$

> ΑΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Δίνεται τ.δ από πληθυσμό με κατανομή $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x \geq 0$.
Βρείτε ΔΕ για το θ .

Λύση:

$$\boxed{\text{1ος τρόπος:}} \quad F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy = -e^{-y/\theta} \Big|_0^x = 1 - e^{-x/\theta}, x \geq 0$$

$$Q = -2 \sum_{i=1}^n \log[1 - F_X(x_i, \theta)] = -2 \sum_{i=1}^n \log[1 - (1 - e^{-x_i/\theta})] = -2 \sum_{i=1}^n \log e^{-x_i/\theta} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} \sim \chi^2_{2n}$$

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(q_1 \leq 2 \frac{\sum x_i}{\theta} \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{q_2} \leq \frac{\theta}{2 \sum x_i} \leq \frac{1}{q_1}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{2 \sum x_i}{q_2} \leq \theta \leq \frac{2 \sum x_i}{q_1}\right) = 1 - \alpha$$

Επειδή δεν μπορεί να βρω ΔΕ ελαχίστου μήκους θα βρω ΔΕ ίσων ουρίων

δίνω τα q_1, q_2 τ.ω.

$$P(Q \leq q_1) = \alpha/2 \Rightarrow q_1 = \chi^2_{2n, 1-\alpha/2}$$

$$P(Q \geq q_2) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow q_2 = \chi^2_{2n, \alpha/2}$$

2ος τρόπος:

Βρίσκω την εκφώνηση 6.6. (περιέχει όλη της πληροφορία για το θ)

$$\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum x_i/\theta} = g(\sum x_i, \theta) h(x)$$

$$T = \sum_{i=1}^n x_i$$

Θέλω να βρω την κατανομή του $T = \sum x_i$, όπου $x_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\theta})$

$$m_T(t) = m_X^n(t) \stackrel{x \sim \text{Exp}(\frac{1}{\theta})}{=} \left(\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta} - t} \right)^n = \left(\frac{1}{1 - \theta t} \right)^n = (1 - \theta t)^{-n}, \quad t < \frac{1}{\theta}$$

✓
Ποτ. της Γάμμα(n, θ)

Συνεπώς, $T \sim \text{Γάμμα}(n, \theta)$

Το T δεικνύει την ποσότητα

Θ.δ.ο $Z = \frac{2T}{\theta} \sim \text{Γάμμα}(n, 2)$

$$m_Z(t) = E(e^{t^2 \frac{T}{\theta}}) = m_T\left(\frac{2t}{\theta}\right) = \left(1 - \theta \frac{2t}{\theta}\right)^{-n}, \quad \frac{2t}{\theta} < \frac{1}{\theta}$$

Άρα

$$m_Z(t) = (1 - 2t)^{-n}, \quad t < \frac{1}{2} \quad (\text{προσέχω για } \Gamma(n, 2) \equiv X_{2n}^2)$$

2) $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από πληθυσμό με $f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_1} x^{\theta_2-1} e^{-\frac{x}{\theta_1} \theta_2}$, $\theta_1, \theta_2 > 0$, $x > 0$
 θ_2 : γνωστό.

Να βρεθεί Δ.Ε. για την παράμετρο θ_1 .

Λύση: (Weinball)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{\theta_2}{\theta_1} y^{\theta_2-1} e^{-\frac{y}{\theta_1} \theta_2} dy = \frac{\theta_2}{\theta_1} \int_0^x y^{\theta_2-1} e^{-\frac{y}{\theta_1} \theta_2} dy$$

$$= -e^{-\frac{y}{\theta_1} \theta_2} \Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1} \theta_2}, \quad x \geq 0$$

$$\left(e^{-\frac{y}{\theta_1} \theta_2} \right)' = -\frac{\theta_2}{\theta_1} y^{\theta_2-1} e^{-\frac{y}{\theta_1} \theta_2}$$

$$Q = -2 \sum \log[1 - F_X(x_i, \theta_1, \theta_2)] = -2 \sum \log e^{-\frac{x_i}{\theta_1} \theta_2} = 2 \sum \frac{x_i}{\theta_1} \theta_2 \sim \chi_{2n}^2$$

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow P(q_1 \leq \frac{2 \sum x_i \theta_2}{\theta_1} \leq q_2) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{2 \sum x_i \theta_2}{q_2} \leq \theta_1 \leq \frac{2 \sum x_i \theta_2}{q_1}\right) = 1 - \alpha$$

Δ.Ε. lower αρίου

$$P(Q \leq q_1) = \alpha/2 \Rightarrow q_1 = \chi_{2n, 1-\alpha/2}^2$$

$$P(Q \geq q_2) = \alpha/2 \Rightarrow q_2 = \chi_{2n, \alpha/2}^2$$

Ερώτηση

$$\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \frac{\theta_2^n}{\theta_1^n} \prod_{i=1}^n x_i^{\theta_2-1} e^{-\frac{\sum x_i^{\theta_2}}{\theta_1}} = h(x) g(\sum x_i^{\theta_2}, \theta_1)$$

Επομένως, $T = \sum x_i^{\theta_2} \sim ?$

Έστω $Y = X^{\theta_2}$

Μέθοδος του μετασχηματισμού

$$Y = X^{\theta_2} \Rightarrow X = Y^{1/\theta_2} \quad dx = \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1} dy$$

$$f_Y(y) = f_X(y^{1/\theta_2}) \cdot \left| \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1} \right| \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(y^{1/\theta_2} \right)^{\theta_2-1} e^{-\frac{(y^{1/\theta_2})^{\theta_2}}{\theta_1}} \cdot \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1}$$

$$= \frac{\theta_2}{\theta_1} y^{1/\theta_2} e^{-\frac{y}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1} = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{y}{\theta_1}}, y \geq 0$$

$$Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)$$

$$Y_i = X_i^{\theta_2} \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\theta_1}\right) \equiv \text{Gamma}(1, \theta_1)$$

$$T = \sum Y_i \sim \text{Gamma}(n, \theta_1)$$

$$Q = \frac{2T}{\theta_1} \sim \text{Gamma}(n, 2) \text{ (ιδία με πριν)}$$

Διαστήματα Επιστομής κατά BAYES

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τ.δ από έναν πληθυσμό με β.π.η ή β.π $f(x|\theta)$ όπου θ είναι η τιμή της τ.μ. θ με τις δύο προτεινόμενες κατανομές $f(\theta)$.

(χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε τις συνεχείς τ.μ.)

Το (q_1, q_2) είναι ένα $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. (κατά Bayes) για την παράμετρο θ όταν υιοθετείται η σχέση

$$\int_{q_1}^{q_2} f(\theta|x) d\theta = 1-\alpha$$

Παρατήρηση: ① Θεωρούμε ως καλύτερο Δ.Ε. εκείνο που έχει το μεγαλύτερο μήκος $l = q_2 - q_1$

② Δ.Ε. ίσων αρίων: $\int_{-\infty}^{q_1} f(\theta|x) d\theta = \alpha/2$, $\int_{q_2}^{\infty} f(\theta|x) d\theta = \alpha/2$

③ Όταν η $f(\theta/x)$ είναι αυξανόμενη με προς q_2 ενώ αν είναι φθίνουσα με προς q_1

> Παράδειγμα

1) Έστω x/θ $f(x/\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $0 \leq \theta < x$

$f(\theta) = \theta e^{-\theta}$, οπότε να βρεθεί το Δ.Ε. ελαχίστου λήτους

Λύση

$$f(\theta/x) = \frac{f(\theta) f(x/\theta)}{\int f(\theta) f(x/\theta) d\theta} = \frac{\theta e^{-\theta} e^{-x/\theta}}{\int \theta e^{-\theta} e^{-x/\theta} d\theta} = \frac{\theta}{\int_0^x \theta d\theta} = \frac{\theta}{\frac{\theta^2}{2} \Big|_0^x} = \frac{2\theta}{x^2}, \text{ αρα}$$

$$(q_1, q_2) \quad \left| \int_{q_1}^{q_2} f(\theta/x) d\theta = 1-a \right| \Rightarrow \int_{q_1}^{q_2} \frac{2\theta}{x^2} d\theta = 1-a$$

$$l = q_2 - q_1$$

$$\frac{dl}{dq_2} = \frac{dq_2}{dq_2} - \frac{dq_1}{dq_2} = 1 - \frac{dq_1}{dq_2}$$

Έστω $\mathbb{I}$ η α.β.υ της θ/x

$$H \text{ ① } F(q_2/x) - F(q_1/x) = 1-a$$

$$\text{Πορ/ψω ως προς } q_2: f(q_2/x) - f(q_1/x) \cdot \frac{dq_1}{dq_2} = 0$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{f(q_2/x)}{f(q_1/x)}$$

$$\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{f(q_2/x)}{f(q_1/x)} = 1 - \frac{\frac{2q_2}{x^2}}{\frac{2q_1}{x^2}} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_1 - q_2}{q_1} < 0$$

l φθίνουσα ως προς q_2 . Η l ελαχιστοποιείται ως προς q_2

$$\text{για } \boxed{q_2 = x}$$

$$\int_{q_1}^x \frac{2\theta}{x^2} d\theta = 1-a \Rightarrow \frac{\theta^2}{x^2} \Big|_{q_1}^x = 1-a \Rightarrow q_1^2 = x^2 \cdot a \Rightarrow \boxed{q_1 = x\sqrt{a}}$$

$$\Delta E(x\sqrt{a}, x)$$

Αν ζητάμε Δ.Ε. των αρίθμ:

$$q_1: \int_{-\infty}^{q_1} f(\theta/x) d\theta = \alpha/2 \Rightarrow \int_0^{q_1} \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \alpha/2$$

$$\int_{q_2}^{+\infty} f(\theta/x) d\theta = \alpha/2 \Rightarrow \int_{q_2}^x \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \alpha/2$$

Λύοντας τα σύστημα βρίσκουμε ότι: $q_1 = x\sqrt{\alpha/2}$
 $q_2 = x\sqrt{1-\alpha/2}$

Αλλά
 εντάξει

2) $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από $U(0, \theta)$ $f(x/\theta) = \frac{1}{\theta}, 0 < x < \theta$

$f(\theta) = kx_0^k, x_0 < \theta < \infty, k$ γνωστός

Να βρεθεί Δ.Ε. ελάχιστων μήκους και θ^{k+1} των αρίθμ.

Λύση:

$$f(\theta/x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)}{\int_T^{\infty} f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^{k+1}} \frac{1}{\theta^n}}{\int_T^{\infty} \frac{1}{\theta^{k+1}} \frac{1}{\theta^n} d\theta} = \frac{T^{n+k} (n+k)}{\theta^{n+k+1}}, T \leq \theta < \infty$$

$$0 < x_1 < \theta$$

$$0 < x_2 < \theta$$

⋮

$$0 < x_n < \theta$$

$$x_0 < \theta < \infty$$

$$\max\{x_0, x_1, \dots, x_n\} < \theta < \infty \Rightarrow$$

$$T = \max\{x_0, x_m\} < \theta < \infty$$

Δ.Ε. με ελάχιστο μήκος: $\int_{q_1}^{q_2} f(\theta/x) d\theta = 1 - \alpha$

$$l = q_2 - q_1$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 = \dots = \frac{f(q_1/x)}{f(q_2/x)} - 1 = \frac{\frac{1}{q_1^{n+k+1}}}{\frac{1}{q_2^{n+k+1}}} - 1 = \frac{q_2^{n+k+1} - q_1^{n+k+1}}{q_1^{n+k+1}} > 0$$

Λύοντας, $q_1 = T$

$$\int_T^{q_2} f(\theta/x) d\theta = 1 - \alpha \Rightarrow \int_T^{q_2} \frac{T^{n+k} (n+k)}{\theta^{n+k+1}} d\theta = 1 - \alpha \Rightarrow q_2 = T \cdot \alpha^{-\frac{1}{n+k}}$$

Για το Δ.Ε. των αρίθμων:

$$\int_{-\infty}^{q_1} f(\theta/x) d\theta = \alpha/2 \Rightarrow \int_T^{q_1} \frac{T^{n+k}(n+k)}{\theta^{n+k+1}} d\theta = \alpha/2 \Rightarrow q_1 = T(1-\alpha/2)^{-\frac{1}{n+k}}$$

$$\int_{q_2}^{+\infty} f(\theta/x) d\theta = \alpha/2 \Rightarrow \int_{q_2}^{+\infty} \frac{T^{n+k}(n+k)}{\theta^{n+k+1}} d\theta = \alpha/2 \Rightarrow q_2 = T\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{n+k}}$$

(Άσκηση 18 H.W)

Σελ 17-47 (εντός ύλης προόδου)

Σελ 58 Ασκ. 2.1-2.3

Σελ 62 Ασκ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14^{B.C}, 15
16 (εντός ύλης) 17, 18 (H.W).

27/11/2019

ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Έλεγχος υποθέσεων

- Διατύπωση της προς έλεγχο υπόθεσης
- Ανάπτυξη μεθοδολογιών που στηρίζονται στο Τ.Δ για τον έλεγχο της υπόθεσης
- Εφαρμογή ευληπτικών

H_0 : μηδενική υπόθεση (ορίζεται με την ελπίδα να απορριφθεί)

H_a : ευλη

Η διαδικασία για τη λήψη απόφασης $\rightarrow$ στατιστικό τεστ

Βήματα

1^ο Εύρεση μιας G.G που έχει γνωστή κατανομή όταν αληθεύει η υπόθεση H_0

2^ο Κατασκευή κ.η ή περιοχής απόρριψης

	Ho αληθής	Ha: αληθής	
Αποδ Ho		Σφάλμα Τύπου II	
Στατιστικός			
Απορ. Ho	Σφάλμα Τύπου I		

$$P(\text{Σφάλμα Τύπου I}) = P(\text{Απορ Ho} \mid \text{Ho: αληθής}) = \alpha$$

$$P(\text{Σφάλμα Τύπου II}) = P(\text{Αποδ Ho} \mid \text{Ha: αληθής}) = \beta$$

α! Επίπεδο σημαντικότητας
εξαρτάται το α (5% ή 1% ή 10%)

Στόχος: Ελαχιστοποίηση του β ή μεγιστοποίηση του $\gamma = 1 - \beta$ (Ισχύς)

$$\gamma = 1 - \beta = P(\text{Απορ Ho} \mid \text{Ha: αληθής})$$

Στοιχεία - Βήματα ενός test

1. Διατύπωση των Ho, Ha
2. Επίπεδο σημαντικότητας (καθορισμός)
3. Στατιστική συνάρτηση - κρίσιμη περιοχή
4. Απόφαση.

Οι υποθέσεις διαυπίνονται:

- ① Άλλες - ΣΥΝΘΕΤΕΣ
- ② Μονόπλευρες - Διπλευρές
- ③ Δεξιόπλευρες - Αριστερόπλευρες

Αντή είναι η υπόθεση η οποία καθορίζει αλήθως την κατανομή της τυχράς μεταβλητής

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta \neq 5 \text{ (αλή)}$$

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta > 5 \text{ (αλή)}$$

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta < 5 \text{ (αλή)}$$

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta > 5 \text{ (αλή)}$$

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta > 5 \text{ (αλή)}$$

$$H_0: \theta = 5 \text{ (αλή)} \quad H_1: \theta < 5 \text{ (αλή)}$$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ TEST

Αντή H_0 vs Αντή H_a

Θεμελιώδες ημίλημα Neyman-Pearson: Έστω ένα πρόβλημα ελέγχου μιας αντή H_0 ως προς μια αντή H_a . Έστω $x_1, \dots, x_n$ το διαδοίκιο τ.δ. Αν υπάρχει μια κ.η G μεγέθους α και ένας σταθερός αριθμός κ. τ.ω $\frac{\lambda_0}{\lambda_a} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | H_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | H_a)} \leq k \quad \forall x \in G$

και $\frac{\lambda_0}{\lambda_a} > k \quad \forall x \in G'$ τότε η περιοχή αυτή G είναι η μέγ.

Ιχυρή κ.η μεγέθους α για τον έλεγχο της H_0 vs H_a .

Αντή H_0 vs Σύνδεση H_a

Έστω ένα πρόβλημα ελέγχου μιας αντή H_0 ως προς μια σύνδεση H_a και $x_1, \dots, x_n$ το διαδοίκιο τ.δ. Έστω, επίσης, το ισχυρότατο test μεγέθους α της H_0 έναντι της αντή ενλής $\theta = \theta_a$ όπου θ_a είναι το ίδιο $\forall \theta_a \in H_a$. Τότε αυτό είναι το O.I (οποιαδήποτε ισχυρότατο) test μεγέθους α της H_0 προς την H_a .

Παράδειγμα 1

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. Ευθ(λ) $f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$H_0: \lambda = \lambda_0$ vs $H_a: \lambda = \lambda_a (\lambda_a > \lambda_0)$
(αντή) (αντή)

Λύση: $\frac{\lambda_0}{\lambda_a} \leq k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \lambda = \lambda_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \lambda = \lambda_a)} \leq k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_0 e^{-\lambda_0 x_i}}{\prod_{i=1}^n \lambda_a e^{-\lambda_a x_i}} \leq k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum x_i}}{\lambda_a^n e^{-\lambda_a \sum x_i}} \leq k \Rightarrow e^{-\lambda_0 \sum x_i + \lambda_a \sum x_i} \leq k \frac{\lambda_a^n}{\lambda_0^n} = k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda_0 \sum x_i + \lambda_a \sum x_i \leq k_2 \Rightarrow \sum x_i (\lambda_a - \lambda_0) \leq k_2 \xrightarrow{\lambda_a > \lambda_0} \boxed{\sum x_i \leq k_3}$$

$\sum x_i \leq k_3$ όπου το k_3 προδιορίζεται έτσι ώστε

$$P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$$

$$\alpha = P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = P(\sum x_i \leq k_3 | \text{Ευθ}(\lambda = \lambda_0))$$

Αρα πρέπει να βρω την κατανομή του $\sum x_i$ υπό την H_0 δηλ. όταν

$x_1, \dots, x_n$ τ.δ. Ευθ. $(\lambda_0) \equiv \text{Γάμμα}(1, \frac{1}{\lambda_0})$

Αρα με πολτρίες αποδεικνύω ότι $T = \sum x_i \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\lambda_0})$

$$\int_0^{k_3} f_T(t) dt = \alpha \Rightarrow \int_0^{k_3} \frac{t^{n-1} e^{-\lambda_0 t}}{(\frac{1}{\lambda_0})^n \Gamma(n)} dt = \alpha \quad (\text{δύσκολη διαδίσταση})$$

Γνωρίζω ότι: $\chi_n^2 \equiv \text{Γάμμα}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$T \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\lambda_0})$

Τι κατανομή αναπαράγει το $W = 2\lambda_0 T$???

$$m_W(t) = E(e^{tW}) = E(e^{t2\lambda_0 T}) = m_T(2\lambda_0 T) \stackrel{T \sim \text{Γάμμα}(n, \frac{1}{\lambda_0})}{=} (1 - \frac{1}{\lambda_0} 2\lambda_0 t)^{-n}$$

$2\lambda_0 t < \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow t < \frac{1}{2}$

↳ $\text{Γάμμα}(n, 2) = \chi_{2n}^2$

Δηλ. $W \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{2n}^2$

$$P(\sum x_i \leq k_3 | H_0) = \alpha \Rightarrow P(2\lambda_0 \sum x_i \leq k_4 | H_0) = \alpha \Rightarrow P(W \leq k_4 | H_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow k_4 = \chi_{2n, 1-\alpha}^2$$

Άσκηση 2

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. Ευθ. (λ) $f(x/\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

Να ελεγχθεί η υπόθεση $H_0: \lambda = \lambda_0$ vs $H_a: \lambda > \lambda_0$
(αμή) (αύθεν)

Λύση:

Θεωρώ ότι έχω να ελέγξω την $H_0: \lambda = \lambda_0$ vs $H_a: \lambda > \lambda_0$ ($\lambda_0 > \lambda_0$)

Για αυτή θα εφαρμόσω το θεμελιώδες λήμμα του

Neymann-Pearson.

κατέληξα $2\lambda_0 \sum x_i \leq \chi_{2n, 1-\alpha}^2 \rightarrow$ είναι το ίδιο $\forall \lambda \in H_a$

είναι ανεξ. του λ

Από αυτό είναι το O.I test μεγέθους α για την οπλή vs
εώνδεση.

TEST ΠΗΛΙΚΟΥ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L}{\max_{\theta \in \Theta} L}$$

$$H_0: \theta \notin \Theta_0$$

L : η συνολική πιθανοφάνεια $L = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$

H_0 : απορρίπτεται όταν $\lambda \leq k$

όπου k τιώ $P(\text{απορ } H_0 | H_0 \text{ αληθ}) = \alpha \Rightarrow P(\lambda \leq k | H_0 \text{ αληθ}) = \alpha$

Ασκήση: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ από $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 : άγνωστα
Να ελέγξει $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2} \quad \underline{\sigma^2 = \varphi}$$

$$= (2\pi\varphi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu)^2}$$

$$L_0 = L(\overset{\text{μωρε}}{\mu_0}, \varphi) = (2\pi\varphi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu_0)^2}$$

$$\ln L_0 = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \varphi - \frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial \varphi} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2} \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\max L_0 = (2\pi\tilde{\varphi})^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\tilde{\varphi}} \sum (x_i - \mu_0)^2} = (2\pi\tilde{\varphi})^{-n/2} e^{-n/2}$$

$L = (2\pi\varphi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu)^2}$ και θέλω να την μεγιστοποιήσω ως προς φ και μ
ή εύκολα την

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \varphi - \frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2\varphi} \sum (x_i - \mu) \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} &= -\frac{n}{2\varphi} + \frac{1}{2\varphi^2} \sum (x_i - \mu)^2 \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} = 0 \xrightarrow{\hat{\mu} = \bar{x}} \hat{\varphi} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \right.$$

$$\max_{\theta \in \Theta} L = (2n\hat{\varphi})^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\hat{\varphi}} \sum (x_i - \bar{x})^2} = (2n\hat{\varphi})^{-n/2} e^{-n/2}$$

$$\frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L}{\max_{\theta \in \Theta} L} \leq k \Rightarrow \frac{(2n\tilde{\varphi})^{-n/2} e^{-n/2}}{(2n\hat{\varphi})^{-n/2} e^{-n/2}} \leq k \Rightarrow \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\hat{\varphi}} \right)^{-n/2} \leq k \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)^{-n/2} \leq k \quad (1)$$

$$\sum (x_i - \mu_0)^2 = \sum (\underbrace{x_i - \bar{x}}_a + \underbrace{\bar{x} - \mu_0}_b)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu_0) \sum (x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

$$= \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \frac{\sum x_i}{n} = 0$$

$$(1) \left(\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)^{-n/2} \leq k \Rightarrow \left(\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{n/2} \leq k$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\cancel{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{\cancel{\sum (x_i - \bar{x})^2} \left(1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)} \right]^{n/2} \leq k \Rightarrow \left(\frac{1}{1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \right)^{n/2} \leq k$$

$$\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \geq k_1$$

$$k_1 \text{ T/w } \alpha = P(\text{accept } H_0 \mid H_0 \text{ a.t.m.})$$

$$P\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \geq k_1 \mid \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \sim \\ N(\mu_0, \sigma^2) \end{matrix} \right) = \alpha$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } N(\mu_0, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

$$\text{Zέρω ου } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$P(t^2 \geq k_1) = P(|t| \geq k_2)$$

$$k_2 = t_{n-1, \alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$t = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2}} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2/n} &\sim \chi_1^2 \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-1}^2 \end{aligned} \right\}$$

$$F_{1, n-1} = \frac{\frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2/n}}{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{(n-1)}} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$P(F_{1, n-1} \geq k_2)$$

$$P\left(\frac{n(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \geq k_1\right) = P(|t_{n-1}| \geq k_2)$$

$$\text{Ακονση: } X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } P(m_1) \quad f(x_i/m_1) = \frac{m_1^{x_i} e^{-m_1}}{x_i!}, \quad x_i = 0, 1, \dots$$

$$Y_1, \dots, Y_n \text{ i.i.d. } P(m_2)$$

Να βρείτε το TEST μηδενικής υπόθεσης για τον έλεγχο

$$H_0: m_1 = m_2 (=m)$$

$$H_a: m_1 \neq m_2$$

Λύση:

$$\lambda \leq k \quad \lambda = \frac{\max_{H_0} L}{\max_{H_a} L}$$

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{m_1^{x_i} e^{-m_1}}{x_i!} \prod_{i=1}^n \frac{m_2^{y_i} e^{-m_2}}{y_i!} = \frac{m_1^{\sum x_i} e^{-nm_1}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \frac{m_2^{\sum y_i} e^{-nm_2}}{\prod_{i=1}^n y_i!}$$

$$\ln L = \sum x_i \ln m_1 - nm_1 + \sum y_i \ln m_2 - nm_2 + \text{const.}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m_1} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{m_1} - n = 0 \Rightarrow \hat{m}_1 = \bar{x}$$

$$\dots \dots \dots \text{ομοίως} \dots \dots \dots \hat{m}_2 = \bar{y}$$

$$\max_{\Theta} L = \frac{(\bar{x})^{\sum x_i} e^{-n\bar{x}} (\bar{y})^{\sum y_i} e^{-n\bar{y}}}{\prod x_i! \prod y_i!}$$

$$L_0 \stackrel{\text{όταν } H_0 \text{ αληθής}}{=} \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n} \frac{e^{-2nm}}{m^{\sum x_i + \sum y_i} \prod x_i! \prod y_i!}$$

$$\ln L_0 = (\sum x_i + \sum y_i) \ln m - 2nm + \text{const.}$$

$$\frac{\partial \ln L_0}{\partial m} = 0 \Rightarrow \hat{m} = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{2n} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$$

$$\max_{\Theta \in \Theta_0} L = \left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right)^{\sum x_i + \sum y_i} \frac{e^{-(\sum x_i + \sum y_i)}}{\prod x_i! \prod y_i!}$$

→ πρέπει να βρω τον παρανομοτυπία

$$\lambda \leq k \Rightarrow \frac{\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right)^{\sum x_i + \sum y_i} e^{-(\sum x_i + \sum y_i)}}{(\bar{x})^{\sum x_i} (\bar{y})^{\sum y_i} e^{-n(\bar{x} + \bar{y})}} \leq k \Rightarrow$$

→ δεν μπορεί
→ προσδιορίζω το k ώστε να είναι επιπλέον σημαντικός

Αποδεικνύεται ότι $-2 \ln \lambda \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{r-1}^2$, γ: περιγραφικοί που επηρεάζει η H_0
 $k.n (\chi_{r-1}^2, +\infty)$ $\chi_{r-1}^2 (l=m)$

11/12/2019

Ελέγχος υποθέσεων (να πάρω μια απόφαση) $\leftarrow H_0$ απορ.
 $\leftarrow H_0$ δέχεται.

• Αντί vs αντί

• $H_0: \theta = \theta_0 \quad H_1: \theta = \theta_1$

Neymann-Pearson

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)} \leq c \text{ ή } d \text{ που } c \text{ το}$$

• Αντί vs Συνέστη

• Test μηδενικών υποθέσεων

$$P(\text{απορ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$$

• $H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta > \theta_0$ (τη μεταρρύθμιση σε αυτή vs αυτή και δουλεύει το ημίμα Neyman-Pearson)

Τότε επιθυμούμε πιθανοφάνεια $\frac{\max_{\theta \in \theta_0} L}{\max_{\theta = \theta} L} \leq \alpha$

Όπου α το $P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: $\rightarrow$ Minimax
 $\rightarrow$ Bayes

$H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$ (αλή vs αλή)
 Συμβολίζω με d_0 : η απόφαση να αποδεχτώ την H_0
 d_1 : η απόφαση να απορρίψω H_0

$L(\theta, d)$
 $\theta_0, \theta_1 \rightarrow d_0, d_1$ (4 δυνατές types)
 απορρίπτω την H_0 άρα $\theta = \theta_1$
 όπως έχω $\theta = \theta_0$
 $\rightarrow$ η απη
 $L(\theta_0, d_0) = 0$ $L(\theta_0, d_1) = k_1 > 0$
 $L(\theta_1, d_1) = 0$ $L(\theta_1, d_0) = k_0 > 0$
 να αποδεχτώ την H_0 δηλ. $\theta = \theta_0$ ενώ $\theta = \theta_1$
 άρα έχω να πληρώσω ποσό αντίθετο $k_0 > 0$

$R(\theta, d) = E L(\theta, d)$
 $R(\theta_0, d_1) = E L(\theta_0, d_1) = L(\theta_0, d_1) P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = P(k_1)$
 $R(\theta_1, d_0) = L(\theta_1, d_0) P(\text{αποδεχάμαι } H_0 | H_0 \text{ αληθής})$
 $= k_0 [1 - P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής})] = k_0 [1 - \gamma(\theta_1)]$

Σαν το καλύτερο τεστ καλύτερη απόφαση είναι εκείνο που ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα τις αναμενόμενες διουινδανέουσες $R(\theta_0, d_1)$ $R(\theta_1, d_0)$

$\alpha = P(\text{αναρ. } H_0 | H_0 \text{ αληθής})$ $\gamma = 1 - \beta = P(\text{αναρ. } H_0 | H_1 \text{ αληθής})$
 $\beta = P(\text{αναρ. } H_0 | H_1 \text{ αληθής})$

Ορίσμος: Ένα τεστ λέγεται minmax : $\min_d \max_{\theta} R(\theta, d)$

Θεώρημα: Εάν $X_1, \dots, X_n$ τ.δ από έναν αμοιβαίο β.π.π $f(x|\theta)$ και δένω να ελέγξω $H_0: \theta = \theta_0$ ως προς την $H_a: \theta = \theta_1$
 d_0 : η απόφαση της H_0 με $L(\theta_0, d_0) = k_p$
 d_1 : η απόφαση της H_a με $L(\theta_1, d_0) = k_a$

Το τεστ να είναι το minmax τεστ είναι ευθεία να:

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq k_a, \text{ όπου } k_a \text{ έχει επιλεγεί ταν}$$

$$L(\theta_0, d_1) = L(\theta_1, d_0) \Rightarrow k_1 P(\text{απορ. } H_0 / H_0 \text{ αληθής}) = k_0 P(\text{απορ. } H_0 / H_a \text{ αληθής})$$

Π.χ: $X_1, \dots, X_n$ τ.δ $N(\theta, 100)$, $n=100$. Να ελεγχθεί η $H_0: \theta = 75$
 $\sigma^2 = 100$ $H_a: \theta = 78$

Λύση

απνη: $H_0: \theta = 75$ ($\theta_0 = 75$)

απνη: $H_a: \theta = 78$ ($\theta_1 = 78 > \theta_0$)

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} = \frac{\prod_{i=1}^n (2n\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta_0)^2}}{\prod_{i=1}^n (2n\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta_1)^2}} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i-\theta_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i-\theta_1)^2}} \leq k \Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ \sum (x_i-\theta_0)^2 - \sum (x_i-\theta_1)^2 \}} \leq k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} \{ \sum x_i^2 - 2\theta_0 \sum x_i + n\theta_0^2 - \sum x_i^2 + 2\theta_1 \sum x_i - n\theta_1^2 \} \geq k_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \dots \} \geq k_2 \Rightarrow 2(\theta_1 - \theta_0) \sum x_i \geq k_3 \Rightarrow \sum x_i \geq \frac{k_3}{2(\theta_1 - \theta_0)} \Rightarrow \sum x_i \geq k_4$$

$$\bar{x} \geq k_5$$

Γνωρίζουμε ότι $x_i \sim N(\theta, 100)$

$$\sum x_i \sim N(n\theta, n100) \quad \bar{x} \sim N(\theta, \frac{100}{100})$$

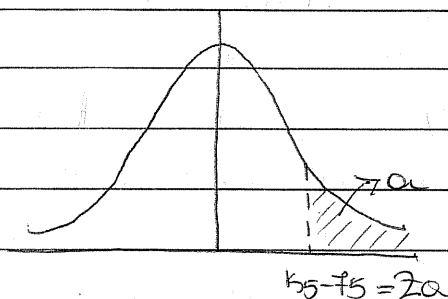
N-P To k_5 είναι τ/ω $P(\text{accept } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = \alpha$

$$P(\bar{x} \geq k_5 | \bar{x} \sim N(75, 1)) = \alpha \Rightarrow P(\underbrace{\bar{x} - 75}_{\downarrow} \geq \underbrace{k_5 - 75}_{\downarrow} | \bar{x} \sim N(75, 1)) = \alpha$$

$$\Rightarrow P(Z \geq k_5 - 75) = \alpha$$

$$k_5 - 75 = z_\alpha \Rightarrow$$

$$k_5 = z_\alpha + 75$$



Minimax

To k_5 είναι τ/ω $R(\theta_0, d_1) = R(\theta_1, d_0) \Rightarrow$

$$L(\theta_0, d_1) P(\text{accept } H_0 | H_0 \text{ αληθής}) = L(\theta_1, d_0) P(\text{accept } H_0 | H_1 \text{ αληθής})$$

$$\Rightarrow 3 P(\bar{x} \geq k_5 | \bar{x} \sim N(75, 1)) = P(\bar{x} < k_5 | \bar{x} \sim N(78, 1))$$

$$\Rightarrow 3 P(\bar{x} - 75 \geq k_5 - 75 | \bar{x} \sim N(75, 1)) = P(\bar{x} - 78 < k_5 - 78 | \bar{x} \sim N(78, 1))$$

$$\Rightarrow 3 P(Z_1 \geq k_5 - 75) = P(Z_2 < k_5 - 78) \text{ όπου } Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$$

Έστω Φ η α.β.κ. της $N(0, 1)$

$$P(Z \geq \alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

$$3 [1 - \Phi(k_5 - 75)] = \Phi(k_5 - 78) \Rightarrow k_5 = 76,8$$

H.W. Να βρεθούν $\alpha = P(\bar{x} \geq 76,8 | H_0 \text{ αληθής}) \sim \bar{x} \sim N(75, 1)$

$$\beta = P(\bar{x} \geq 76,8 | H_1 \text{ αληθής}) \sim \bar{x} \sim N(78, 1)$$

Methodologies

$$\textcircled{1^{\text{st}}} \lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1)} \leq c \text{ όπου } c \text{ τ/ω ενήμερο επιτ.α.}$$

$\textcircled{2^{\text{nd}}}$ Minimax.

$$\lambda \leq c' \text{ τ/ω } R(\theta_0, d_1) = R(\theta_1, d_0)$$

Δω είναι δίπουρο το α .

$\textcircled{3^{\text{rd}}}$ Θεωρία Bayes $\lambda \leq \text{πρωτό αριθμό.}$

① καθαρικός $f(x_i | \theta)$

② $\gg \pi(\theta)$

(3°) Υπολογισμός
$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta}$$

(4°) Συνεκρίνουμε με βάση την $f(\theta|x)$

Θεώρημα: $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με β.π.π $f(x|\theta)$ από θ είναι η τιμή της τ.β. θ με ευ. των ποσών υπολογισμένη $f(\theta)$. Για τον έλεγχο της $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ το τεστ Bayes είναι:

$$\lambda_B = \frac{f(\theta_0) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{f(\theta_1) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq \frac{L(\theta_1, d_0)}{L(\theta_0, d_1)}$$

ή ενιαία

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq \left[\frac{k_0}{k_1} \frac{f(\theta_1)}{f(\theta_0)} \right] \rightarrow \text{γνωστή ποσότητα}$$

Ανρ. H_0

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$f(\theta_0|x) L(\theta_0, d_1) < f(\theta_1|x) L(\theta_1, d_0)$$

$$H_1: \theta = \theta_1$$

Ασκηση

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\theta, 1)$, Δίνεται $k_0 = k_1$, $f(\theta_1) = f(\theta_0) = \frac{1}{2}$

Να ελεγχθεί η $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$

Να βρεθεί το Bayes τεστ, τα α, γ .

Λύση:

$$\lambda \leq k \text{ όπου } \lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \text{ και } k = \frac{k_0}{k_1} \frac{f(\theta_1)}{f(\theta_0)} = 1$$

$$\lambda \leq 1 \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_0)}{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1)} \leq 1 \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_0)^2}}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_1)^2}} \leq 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i-\theta_0)^2 - \sum (x_i-\theta_1)^2} \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \sum \sum (x_i-\theta_0)^2 - \sum (x_i-\theta_1)^2 \leq 0 \Rightarrow \sum (x_i-\theta_0)^2 - \sum (x_i-\theta_1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\sum x_i^2 - 2\theta_0 \sum x_i + n\theta_0^2 - \sum x_i^2 + 2\theta_1 \sum x_i - n\theta_1^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$2 \sum x_i (\theta_1 - \theta_0) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \geq 0 \Rightarrow -2 \sum x_i (\theta_0 - \theta_1) > -n(\theta_0 - \theta_1)(\theta_0 + \theta_1)$$

$$\Rightarrow \sum x_i > \frac{-n(\theta_0 - \theta_1)(\theta_0 + \theta_1)}{-2(\theta_0 - \theta_1)} = \frac{n(\theta_0 + \theta_1)}{2} \Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \Rightarrow \bar{X} \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \quad \text{κ.ν.}$$

$$K.N. \quad \bar{X} \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{accept } H_0 | H_0 \text{ is true}) = P\left(\bar{X} \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \mid \bar{X} \sim N(\theta_0, 1/n)\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \theta_0}{\sqrt{1/n}} \geq \frac{\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} - \theta_0}{\sqrt{1/n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} - \theta_0}{\sqrt{1/n}}\right) \end{aligned}$$

$$\beta = P(\text{accept } H_0 | H_1 \text{ is true}) = P\left(\bar{X} \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \mid \bar{X} \sim N(\theta_1, 1/n)\right) = \dots$$

Θέματα Προόδου (Λύση)

A. Ασκ. 3. 6ελ. 62 (ναράματα)

B. Ασκ. 14 Ένας επιπλέον Bayes είναι ανώτερη εμπειρία 6.6.

$$d^* = \min_d E_{\theta|x} L(\theta, d) = \min_d \int L(\theta, d) g(\theta|x) d\theta = \min_d \int L(\theta, d) \frac{g(\theta) f(x|\theta)}{g(x)} d\theta$$

Εδώ T: group

$$\min_d \int L(\theta, d) g(\theta) g(T, \theta) h(x) d\theta$$

↳ παραγοντικό δείκτη

$$= \min_d \int L(\theta, d) g(\theta) g(T, \theta) d\theta = \min_d k(T, d)$$

$$d^* = k_1(T)$$

$$\textcircled{D} i) \quad d^* \text{ αν } L(\theta, d) = \begin{cases} c_1 |d - \theta|, & d \leq \theta \\ c_2 |d - \theta|, & d > \theta \end{cases} = \begin{cases} c_1 (\theta - d), & d \leq \theta \\ c_2 (d - \theta), & d > \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min_d E_{\theta|x} L(\theta, d) &= \min_d \int_{-\infty}^{+\infty} L(\theta, d) g(\theta|x) d\theta = \min_d \int_{-\infty}^d c_2 (d - \theta) g(\theta|x) d\theta + \\ &\quad + \int_d^{+\infty} c_1 (\theta - d) g(\theta|x) d\theta \end{aligned}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Phi(d)}$$

παραγωγίζω με τον κανόνα του Leibniz και δέλω = 0

$$\text{παραγωγίζω } \int_{-\infty}^d g(\theta|x) d\theta = \frac{c_2 \cdot c_1}{c_1 + c_2}$$

$$\underbrace{\hspace{2em}}_{\pi(d^*|x)}$$

Θέμα 2ο

Τ.Σ. $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$ $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$

i) Ε.Μ.Π $L = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}$, $\frac{x_{(n)} < \theta < \infty}{\text{υπό. ως προς } \theta}$ $\hat{\theta} = x_{(n)}$

ii) ΑΟΕΛ $\left. \begin{array}{l} \text{Εμπειρία (T)} \\ \text{Πληρότητα (T)} \\ \text{Αμερόμητος (U(T))} \end{array} \right\} \text{ Έχει γίνει}$

$x_{(n)}$ επαρκής β.β $\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n}$ $x_{(n)} < \theta < \infty = g(x_{(n)}, \theta)$

$Eh(T) = 0 \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \forall t$

$\int h(t) f_T(t) dt = 0$ Δίνεται $F_{x_{(n)}}(t) = (F_X(t))^n$

$f_{x_{(n)}}(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_X(t)$

$f_T(t) = n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}$, $0 < t < \theta$

$\int_0^\theta h(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) t^{n-1} dt = 0 \xrightarrow{\text{να πάρω}} h(\theta) \theta^{n-1} = 0$

$E(U(T)) = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = 0 \Rightarrow h(\theta) \theta^{n-1} = \frac{n+1}{n} \theta^n$

$h(\theta) = \frac{n+1}{n} \theta$

$U(T) = \frac{n+1}{n} T$

iii) Α.ε. ελαχίστων μεγεθών αναμένεται $T = \text{επαρκής β.β}$
 $T = x_{(n)}$ τι κατανομή έχει το T ;

$f_T(t) = n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}$, $0 < t < \theta$

ως αντιστροφή ποσότητα ενδιαφέρει $Q = \frac{x_{(n)}}{\theta} \Rightarrow x_{(n)} = Q\theta$

$\Rightarrow F_Q(q) = f_{x_{(n)}}(\theta q) |\theta| = n \frac{(\theta q)^{n-1}}{\theta^n} \theta = n q^{n-1}$, $0 < q < 1$

κατανομή που δεν περιέχει το θ

$0 < t < \theta$

$0 < \frac{t}{\theta} < 1$
 q

Q είναι πιθανή ανεξάρτητη ποσότητα.

$$q_2 = 1$$

$q_1 = q^{1/n}$ άρα Q = ανεξάρτητη ποσότητα

iii) $f(\theta) = \frac{24}{\theta^4}$, $2 \leq \theta$. $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $x \leq \theta$

Θ η τιμή της T.k.

① Να βρεθεί d^* της θ (α.β. u. i.) ειδική περίπτωση (για $x_0=2$)

$$2 \leq \theta \left\{ \max_{x \leq \theta} \left\{ \frac{x}{T} \right\} \right\} \leq \theta \quad (T \leq \theta)$$

18/12/2019